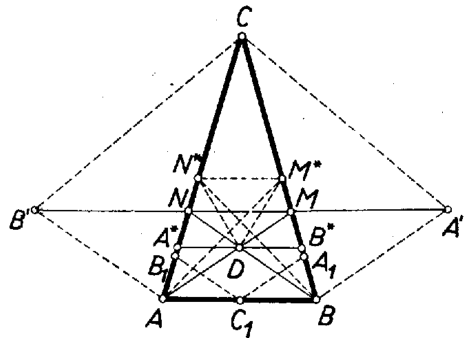
I. megoldás: A vizsgálandó összeget tekinthetjük egy olyan mozgó pont útvonala hosszának, amely az A pontból a BC, majd az AC szár egy-egy pontjának útbaejtésével egyenes szakaszokon B-be megy át. – Legyen az ABC háromszögnek a BC, ill. AC szárra való tükörképe $A'BC$, ill. $AB'C$ (1. ábra).



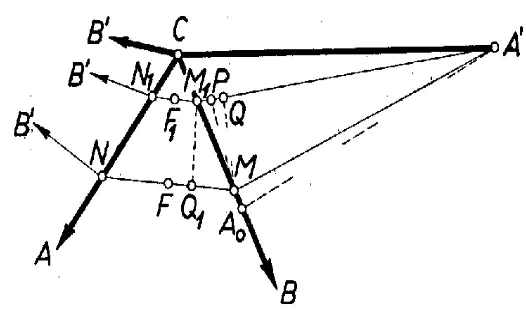
1. ábra

Így $AM = A'M$ és $NB = NB'$, ezért az előírt útvonal minimuma helyett kereshetjük a vele egyenlő $A'M + MN + NB'$ összegnek, vagyis az M és N-re vonatkozó eredeti követelmények mellett az A'-ből B'-be haladó útvonal hosszának minimumát. Az utóbbi kérdés áttekinthetőbb, hiányzik belőle a szárakon való kényszerű irányváltozás. Ha ugyanis C-ből a kétféle útvonalon haladó egy-egy pont felé sugarat irányítunk, ez C körül forog, és forgási iránya az eredeti útvonal esetén kétszer, az M és N-ben való irányváltozáskor ellentétesre fordul, míg a módosított útvonal esetén a forgási irány egyszer sem változik.

Az A' és B' közötti legrövidebb útvonal az $A'B'$ szakasz. Ez meg is felel az előírásnak, hiszen párhuzamos AB-vel, ennélfogva az ACB szög szárai közé eső MN rész-szakaszára is áll; $MN \parallel AB$. Valóban, az $A'B'C$ háromszög egyenlő szárú, mert $CB' = CB = CA = CA'$, továbbá szimmetriatengelye, az $A'CB'$ szög felezője, azonos az ABC háromszög szimmetriatengelyével, az ACB szög felezőjével, hiszen az $A'CB'$ szög a BCA szögből úgy keletkezett, hogy mindkét szárán túl ugyanakkora $BCA\sphericalangle = \gamma$ szöget adtunk hozzá.

A kérdés csak ez: van-e mindig $A'B'$-nek a BCA szög szárai közé eső MN szakasza, metszi-e mindig az $A'B'$ szakasz a CB, CA szár-szakaszokat egy-egy belső pontjukban? Ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy az $A'CB'$ szög kisebb legyen $180°$-nál, vagyis hogy az ACB szög kisebb legyen $60°$-nál. Ilyenkor az $AC = BC$ szárak nagyobbak az AB-alapnál.

Megmutatjuk, hogy a további esetekben, vagyis ha $ACB\sphericalangle \geq 60°$ és így $A'CB' \geq 180°$, nincs a követelményeknek megfelelő minimális útvonal. Ugyanis M-et nem választhatjuk a BC szár C végpontjában, mert különben a rajta keresztül AB-vel párhuzamosan húzott egyenes AC-ből N számára is C-t adná. Így azonban az MN egyenes határozatlan, nem mondhatjuk róla, hogy párhuzamos AB-vel. – Ha pedig M a BC szárnak a C-től különböző pontja, és N-et ismét az AB-vel M-en át húzott párhuzamossal metsszük ki AC-ből, akkor az $A'MNB'$ útvonal nem minimális, mert van nála rövidebb, ilyen pl. a CM szakasz M_1 pontjával ugyanígy szerkesztett útvonal (2. ábra).



2. ábra

Szimmetria folytán elég ezt az útvonalak felére, az $A'M + MF$, illetve $A'M_1 + M_1F_1$ összegekre megmutatni, ahol F, F_1 az MN, M_1N_1 szakasz felezőpontja. Ez nyilvánvaló akkor, ha $A'CB\sphericalangle = ACB\sphericalangle \geq 90°$, mert ilyenkor $A'M_1 < A'M$ és $M_1F_1 < MF$. Ha $90° > A'CB\sphericalangle \geq 60°$, akkor is elég M-ként a CA' szakasz CB-n levő CA_0 vetületének pontjaival foglalkozni, amelyekkel $A'MC\sphericalangle \geq 90°$, és így $A'M_1 > A'M$; különben ugyanis M helyett A_0 is rövidebb útvonalat ad.

Legyen ilyenkor P az $A'M_1$ szakaszon az a pont, amelyre $A'P = A'M$, továbbá M vetülete $A'M_1$-re Q, és M_1 vetülete MN-re Q_1. Ekkor az $A'M_1$ útszakasz többlete $A'M$-hez képest M_1P, és M_1F_1 hiánya MF-hez képest MQ_1, így azt kell megmutatnunk, hogy $M_1P < MQ_1$. P nyilván az M_1Q szakaszon van, így $M_1P < M_1Q$. Másrészt $M_1Q < MQ_1$, mert mindkét szakasz MM_1-nek vetülete, és az MM_1Q hajlásszög, mint az $A'CM_1$ háromszög külső szöge, nagyobb $60°$-nál, az M_1MQ_1 hajlásszög viszont legfeljebb $60°$, ugyanis pótszöge a BAC szög felének, ami legalább $30°$, és nagyobb (de hegyes) hajlásszög esetén a vetület kisebb. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Fekete Jenő (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Lényegében azonos a közölt megoldással a következő szerkesztés: tükrözzük az ABC háromszög CD magasságát BC-re, és bocsássunk erre A-ból merőlegest; ez metszi ki BC-n M-et.

Katona Gyula (Budapest, Kandó K. híradásip. t. IV. o. t.)

2. Felhasználva, hogy $MN \parallel BA$, és hogy A', M, N egy egyenes pontjai, M-et A' és B' megszerkesztése nélkül, a BC szárból az A körül AB sugárral írt körrel is kimetszhetjük. Valóban, $A'BM\sphericalangle = ABM\sphericalangle = NMC\sphericalangle = A'MB\sphericalangle$, az $A'BM$ háromszög egyenlő szárú és így $AM = A'M = A'B = AB$. Ha a minimum létezésének $AB < AC$ feltétele teljesül, akkor egyszersmind $AM < AC$, tehát M a BC szakaszon van.

Parti Enikő (Budapest, Bagi Ilona lg. III. o. t.)

3. A legtöbb dolgozat $ACB\sphericalangle \geq 60°$ esetére M és N mindegyikét C-be helyezve $AC+CB$-t adja meg minimumnak.

II. megoldás: $ACB\sphericalangle < 60°$ esetére a minimumhoz a következő meggondolással is eljuthatunk. Tegyük fel, hogy megtaláltuk a minimális $AMNB \equiv U$ útvonalat adó M pontot. Húzzunk AM és BN-nek D metszéspontján át AB-vel A^*B^* párhuzamost (1. ábra). D belső pontja a háromszögnek, ezért A^* az AC, B^* a BC szakaszon van. Megmutatjuk, hogy a DMN háromszög, amely bele van írva az A^*B^*C háromszögbe, és amelynek kerülete képezi az útvonal középső $DMND$ szakaszát, talpponti háromszöge az A^*B^*C egyenlő szárú háromszögnek.

D mindenesetre talppontja a C-ből húzott magasságnak, mert benne van az $ABMN$ egyenlő szárú trapéz szimmetriatengelyében, amely az ABC és A^*B^*C egyenlő szárú háromszögeknek is tengelye. Ha már most M és N nem volna azonos az A^*B^*C háromszög A^*, B^*-ból húzott magassága M^*, ill. N^* talppontjával, akkor annak az ismert tételnek az alapján, hogy a hegyesszögű háromszögbe beírt háromszögek közül a talpponti háromszög a legkisebb kerületű,[1] az 5 szakaszból álló ADM^*N^*DB útvonal rövidebb volna U-nál, mert középső DM^*N^*D útszakasza rövidebb U-nak $DMND$ középső szakaszánál, kezdő és végszakaszaikban pedig megegyeznek. És még rövidebb volna az AM^*N^*B útvonal, mert az ADM^* háromszögben (amelynek csúcsai M és M^* különbözősége folytán nem esnek egy egyenesbe) $AM^* < AD + DM^*$, és ugyanígy $N^*B < N^*D + DB$. Márpedig az AM^*N^*B útvonal is megfelel a feladat követelményeinek, mert M^* és N^* a CB^* CA^* szakasznak belső pontjai, tehát rajta vannak a BC, AC száron, továbbá $M^*N^* \parallel A^*B^* \parallel AB$, mert az $A^*B^*M^*$ és $A^*B^*N^*$ derékszögű háromszögek egybevágók (az átfogó és két szög) így $B^*M^* = A^*N^*$, tehát az N^*M^*C háromszög is egyenlő szárú. Ellentmondásra jutottunk: az AM^*N^*B útvonal rövidebb a minimális U-nál, helytelen tehát az a feltevés, hogy $M^* \not\equiv M$ és $N^* \not\equiv N$, vagyis DMN valóban talpponti háromszöge A^*B^*C-nek.

Mivel pedig az A^*B^*C háromszög hasonló helyzetű ABC-vel, és így ugyanez áll MND és $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögeikre is, azért ezek alapján a minimális útvonal AM és BN szakaszait úgy szerkesztjük meg, hogy A, B-n át párhuzamost húzunk az ABC háromszög talpponti háromszögének C_1A_1 ill. C_1B_1 oldalaival. Ismeretes, hogy $A_1C_1B\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, eszerint M akkor és csak akkor lesz rajta BC-n, ha $MAB\sphericalangle = ACB\sphericalangle < CAB\sphericalangle$, vagyis $ACB\sphericalangle < 60°$.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás: Legyen $AB = 1$, $CAB\sphericalangle = \alpha$ és fejezzük ki az $y = AM + MN + NB$ összeget az M helyzetét meghatározó $BMA\sphericalangle = \varphi$ függvényeként. (M akkor és csak akkor van a BC szakaszon, ha egyrészt az ABM háromszögből $\varphi = 180° - MBA\sphericalangle - BAM\sphericalangle < 180° - MBA\sphericalangle = 180° - \alpha$, másrészt az ACM háromszögből $\varphi = MAC\sphericalangle + ACB\sphericalangle > ACB\sphericalangle = 180° - 2\alpha$. Az ABM háromszögből $AM = BN = \sin\alpha/\sin\varphi$, továbbá ennek alapján az AMN háromszögből $MN = \sin(\varphi - 180° + 2\alpha)/\sin\varphi = -\sin(2\alpha+\varphi)/\sin\varphi$ és

$$y = \frac{2\sin\alpha - \sin(2\alpha+\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi} - \cos 2\alpha =$$
$$= \frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\,\cos\alpha\,\cos\varphi}{\sin\varphi} - 1 + 2\sin^2\alpha.$$

Ennek a függvénynek φ ugyanazon értéke mellett van a minimuma, mint a következőnek:

$$y_1 = \frac{y+1}{2\sin\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1-\cos(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi},$$

ugyanis $\sin\alpha > 0$. Itt a nevező pozitív, a számláló nem negatív, tehát y_1 legkisebb értéke 0, amikor $\cos(\varphi-\alpha) = 1$, $\varphi = \alpha$, vagyis az ABM háromszög egyenlő szárú.

Ezzel az értékkel akkor teljesülnek a φ-re tett korlátozások, ha egyrészt $\alpha < 180° - \alpha$, másrészt $\alpha > 180° - 2\alpha$, vagyis $60° < \alpha < 90°$, amiből $ACB\sphericalangle < 60°$.

Szatmári Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

[1] Lásd pl. Rademacher–Toeplitz: Számokról és alakzatokról, 23–31. o. Tankönyvkiadó, 1953. Középiskolai Szakköri Füzetek.