Írjuk be a bal oldalba az ismert szögek koszinuszait:

$$\cos(5\pi/6) = \cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2, \quad \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2},$$

$\cos(5\pi/12) = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$, tehát a második tag együtthatója: $-(\sqrt{3}-1)$. Figyelembe véve még a $\cos 2x = 2cos^2 x - 1$ azonosságot, egyenlőtlenségünk így alakul:

$$2\cos^2 x - (\sqrt{3}-1)\cos x - \sqrt{3}/2 > 0,$$

ill. a bal oldalt, mint $\cos x$ másodfokú kifejezését szorzattá alakítva, és (a pozitív) 2-vel egyszerűsítve:

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0. \tag{1}$$

A $-1/2$ és $\sqrt{3}/2$ helyeknek, ahol a szorzat előjelelt válthat, mindketteje beleesik a $\cos x$ által felvehető értékek $(-1, 1)$ zárt intervallumába, így ezen végighaladva mindkét tényező előjelet vált. (1) fennáll, ha mindkét tényező egyenlő jelű, vagyis ha még a kisebb is pozitív, ill. ha még a nagyobb is negatív, azaz ha

$$\text{vagy} \quad \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad \text{azaz} \quad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\text{vagy} \quad \cos x + \frac{1}{2} < 0, \quad \text{azaz} \quad \cos x < -\frac{1}{2}.$$

A $\cos u = \sqrt{3}/2$, ill. $\cos v = -1/2$ egyenleteket a $(0,\, 2\pi)$ intervallumban $u_1 = \pi/6$ és $u_2 = 11\pi/6$, ill. $v_1 = 2\pi/3$ és $v_2 = 4\pi/3$ elégíti ki. Figyelembe véve még az $y = \cos x$ függvény menetét, célszerű lesz u_2 helyett $u_2' = -\pi/6$-ot használnunk. Ezek alapján az adott egyenlőtlenséget azok az x szögek elégítik ki, amelyekre

$$\text{vagy} \quad -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$
$$\text{vagy} \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

ahol k egész szám.

Bíborka Tamás (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Eredményünkhöz a $\cos 2x = 2cos^2 x - 1$ azonosság felhasználása és a 2-vel való osztás utáni

$$\cos^2 x - 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{12}\cos x + \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{6} > 0$$

alakból így is eljuthatunk: vegyük észre, hogy az együtthatók a $2\cos u \cos v = \cos(u+v) + \cos(u-v)$ és más azonosságok alkalmazásával így is írhatók:

$$-2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{12} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12}\right) = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right),$$
$$\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6},$$

és itt ugyanazon két koszinusz érték ellentett jelű összegével, ill. szorzatával állunk szemben, tehát (2) így is írható:

$$\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\right) > 0.$$

Innen a fenti megoldás szerint haladhatunk tovább.

Kolonits Ferenc (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)