Akár közvetlen kiszámítással, akár annak felhasználásával, hogy minden n természetes számra[1]

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}, \tag{1}$$

adódik, hogy a bal oldali törtek értéke $441/25=(21/5)^2$, ill. $784/36=(28/6)^2$. Ugyanennyi a jobb oldali törtek értéke is, mert közös nevezőre hozással és egyszerűsítéssel az

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\pm 2=\frac{(a^2+b^2\pm 2ab)}{ab}=\frac{(a\pm b)^2}{ab} \tag{2}$$

azonosság-pár alapján[2] $(a+b)^2/(a-b)^2=\left[(a+b)/(a-b)\right]^2$ alakúvá válnak és a, $b=13$, 8, ill. 17, 11 mellett $a+b=21$, ill. 28 és $a-b=5$, ill. 6.

(1) alapján

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^2}{(n-1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4(n-1)^2}=\left(\frac{n(n+1)}{2(n-1)}\right)^2,$$

ennélfogva (2)-re tekintettel a kívánt alak céljára azokat az a, b számokat kell meghatároznunk, amelyekre

$$a+b=n(n+1)\quad \text{és}\quad a-b=2(n-1).$$

Ezek:

$$a=(n^2+3n-2)/2,\qquad b=(n^2-n+2)/2.$$

(Pontosabban; elég arányukat meghatározni.) Eszerint a kívánt alak:

$$\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{(n-1)^2}=\frac{\dfrac{n^2+3n-2}{n^2-n+2}+\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n-2}+2}{\dfrac{n^2+3n-2}{n^2-n+2}+\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n-2}-2}.$$

Minthogy $n^2+3n-2=n(n+3)-2$ és $n^2-n+2=n(n-1)+2$, és itt a szorzatok egyik tényezője páros, azért az utolsó alakban szereplő két–két hányados legalább 2-vel egyszerűsíthető.

Mayer Géza (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

[1] Bizonyítását lásd a 798. feladatban: KML. XV. kötet, 20. o. (1957 szeptember).
[2] Ha több, hasonló szerkezetű és csak számadatokban különböző több lépéses számítást kell végeznünk, célszerű ezt általában előkészíteni.