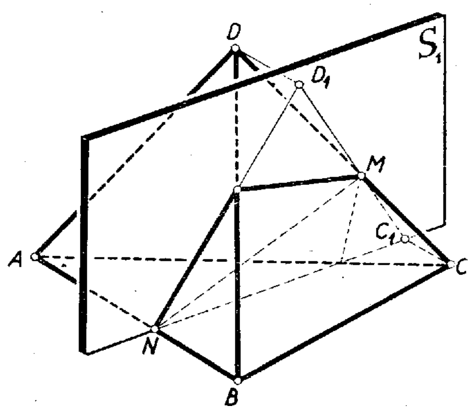
I. megoldás: Jelöljük a szóban forgó felező síkot S-sel. Vetítsük a tetraédert (merőlegesen) az M-en átmenő, AB-re merőleges S_1 síkra, legyen C, D vetülete C_1, D_1, továbbá A és B egybeeső vetülete N.



CC_1 és DD_1 párhuzamosak AB-vel, ezért C_1, D_1 az ABC, ill. ABD síkban is benne vannak, tehát rajta vannak e síkoknak S_1-gyel való C_1N, D_1N metszésvonalán. Ennélfogva a C_1ND_1 szög méri az AB élnél levő lapszöget. – Másrészt S és S_1 metszésvonala NM, és ez felezi a C_1ND_1 szöget. Ugyanis M feltevésnél fogva egyenlő távol van az ABC és ABD lapsíkokon levő M_1 és M_2 vetületeitől, ezek S_1-nek is pontjai, tehát C_1N, ill. D_1N-en vannak, ennélfogva M valóban egyenlő távol van a C_1ND_1 szög száraitól.

A CC_1M és DD_1M derékszögű háromszögek egy a CD-n átmenő és S_1-re merőleges S_2 síkban feküsznek, M-nél fekvő szögeik csúcsszögek, ezért hasonlók. Így

(1)
$$CM : MD = C_1M : MD_1.$$

(Ha S_1 átmegy CD-n, akkor $C_1 \equiv C$, $D_1 \equiv D$, és (1)-re nincs szükség.) A szögfelezőre vonatkozó tételnek a C_1ND_1 háromszögre való alkalmazásával

(2)
$$C_1M : MD_1 = C_1N : ND_1.$$

Itt. $CC_1 \parallel DD_1 \parallel AB$ folytán C_1N és D_1N megegyezik az ABC, ill. ABD háromszögnek az AB alaphoz tartozó magasságával, ennélfogva $AB/2$-vel való szorzatuk e háromszögek területe:

(3)
$$C_1N : ND_1 = \frac{C_1N \cdot AB}{2} : \frac{ND_1 \cdot AB}{2} = t_{ABC} : t_{ABD}.$$

Most már (1), (2) és (3) egybevetése a bizonyítandó állítást adja.

A külső lapszög S_3 felezősíkja CD-t csak C-n, vagy D-n túli meghosszabbításán metszheti. S_3 (amely átmegy AB-n és merőleges S-re) akkor és csak akkor *nem* metszi CD-t, ha párhuzamos vele. Ez az S_1 en való vetületben is megmutatkozik: S_3 nak S_1-gyel való metszésvonala (amely átmegy N-en és merőleges NM-re) párhuzamos C_1D_1-gyel. Így a C_1ND_1 háromszög NM szögfelezője merőleges C_1D_1-re, tehát $C_1N = D_1N$, másképpen: ABC és ABD-nek AB-hez tartozó magasságai egyenlők, tehát $t_{ABC} = t_{ABD}$. – Fordítva, ha e területek egyenlők, akkor az S_1-ben fekvő C_1ND_1 háromszög egyenlő szárú, tehát N-nél fekvő külső szögének f felezője párhuzamos C_1D_1-gyel. Ennélfogva az f-en átmenő és S_1-re merőleges S_3 párhuzamos CD-vel, mert ez S_2 ben fekszik, az pedig átmegy C_1D_1-en és ugyancsak merőleges S_1-re. – Ezek szerint S_3 és CD párhuzamosságához szükséges és elegendő, hogy $t_{ABC} = t_{ABD}$ legyen (amivel a feladat első része szerint együtt jár, hogy M felezi CD-t).

Ha már most $t_{ABC} \neq t_{ABD}$, akkor M' létezik. Ekkor az előbbi S_1 helyett az M'-n átmenő és AB-re merőleges S_1'-t véve az ugyanúgy adódó C_1', D_1', N' vetületekkel a fenti meggondolás ismételhető. A változás csupán az, hogy $N'M'$ külső szögfelezője a $C_1'N'D'$ háromszögnek, azonban (2) megfelelője ekkor is érvényes. Így, ha M' létezik, akkor $CM' : M'D = CM : MD$.

Jelitai Árpád (Bp. XIV. ker., I. István g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az aránypár helyességét az $MABC$ és $MABD$ tetraéderek K_1, ill. K_2 köbtartalmának kétféleképpen való kifejezése útján is igazolhatjuk. E tetraédereknek M-ből húzott magasságai, mint M-nek az ABC és ABD lapsíkoktól való m távolságai, egyenlők, ennélfogva

(4)
$$t_{ABC} : t_{ABD} = m \cdot t_{ABC} : m \cdot t_{ABD} = 3K_1 : 3K_2.$$

Másrészt az A-ból húzott m_a magasságuk közös, mert az A-val szemben fekvő MBC, ill. MBD lapok egybeesnek BCD-vel. Így

(5)
$$3K_1 : 3K_2 = m_a \cdot t_{MBC} : m_a \cdot t_{MBD} = t_{MBC} : t_{MBD}$$

Végül az MBC és MBD háromszögek B csúcsa és MC, ill. MD oldalegyenese közös, tehát közös a B-ből húzott m_b magasságuk is, ezért

$$t_{MBC} : t_{MBD} = \frac{m_b \cdot CM}{2} : \frac{m_b \cdot MD}{2} = CM : MD. \tag{6}$$

Most már az aránypár helyessége (4), (5) és (6) egybevetéséből adódik.

Tihanyi Ambrus (Bp., V., Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) és (5) aránypárok egybekapcsolásával a 934. feladat állítására kapunk bizonyítást. Fordítva, a 934. feladatra támaszkodva is bizonyíthatjuk állításunkat.

2. A 934. és 935. feladatok állításai együtt a háromszög szögfelezője által a szemközti oldalon létrehozott metszetekre vonatkozó síkbeli tétel térbeli általánosításainak tekinthetők, egyszersmind lehetőséget nyújtanak lapszögfelező sík, f_a egy-egy pontjának síkbeli szerkesztéssel való kitűzésére.

3. (1) és (2) egybevetése azt adja, hogy NM a CND szöget is felezi.

4. Elég sok dolgozat a feladat második részében arra hivatkozott, hogy egyrészt CD és S_3 párhuzamosságából, másrészt S_3 és S merőlegességéből az következik, hogy CD és S merőlegesek. Ez téves, nem mindig igaz; vegyük pl. S_3-nak egy vízszintes és függőleges lapokkal határolt téglatest alaplapját, CD-nek a fedőlap egyik átlóját, S-nek pedig bármelyik oldallapot.