I. megoldás: A szóban forgó 3–3 háromszög rendre a $TABC$, $TACD$, $TADB$ tetraédernek 1–1 lapja. E lapokhoz a 3 tetraéderben ugyanakkora magasság tartozik. Ugyanis a TBC, TCD, TDB lapok a BCD síkban feküsznek, ennélfogva az ezen lapokhoz tartozó m magasság közös: A-nak a BCD síktól való távolsága. Az ABC, ACD, ADB lapokhoz tartozó magasságokat T-nek e lapsíkoktól való t távolsága adja, ami ugyanakkora, mert ez a tulajdonsága f_a minden pontjának megvan. Ennek alapján pl. a $TABC$ tetraéder 3-szoros köbtartalma kétféle kifejezésének $TBC \cdot m = ABC.\ t$ egyenlőségéből (a háromszögek területét ugyanúgy jelöltük, mint magukat a háromszögeket):

$$TBC : ABC = t : m = k, \quad \text{és így} \quad TBC = k \cdot ABC. \tag{1}$$

Ugyanez áll a $TCD : ACD$ és a $TDB : ADB$ arányokra is, ennélfogva valóban

$$TBC : TCD : TDB = ABC : ACD : ADB.$$

Szűcs József (Szeged, Ságvári E. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük a T ponton, továbbá az A ponton át BC-re merőleges S_1 és S_2 síkot. S_1 tartalmazza T-nek az ABC lapon levő T_1 és a BC élen levő T_2 merőleges vetületét, S_2 pedig A-nak a BCD lapon levő A_1 és a BC élen levő A_2 merőleges vetületét. A TT_1T_2 és AA_1A_2 háromszögek hasonlók, mert T_1, ill. A_1-nél derékszögűek, továbbá TT_2T_1 és AA_2A_1 szögeik egyenlők, mindegyik megadja az ABC és DBC lapok hajlásszögét. Ennélfogva (a fenti jelölésekkel)

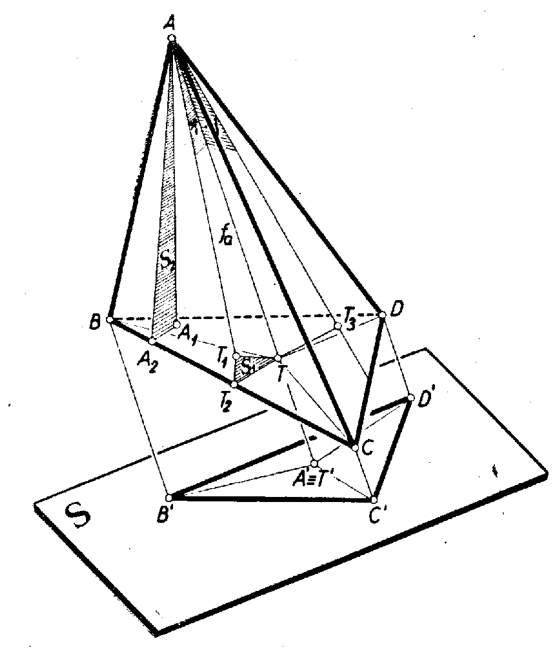
$$TT_2 : AA_2 = TT_1 : AA_1 = t : m. \tag{2}$$

Innen a bal oldali arány mindkét tagját $BC/2$-vel szorozva, és a szorzatokban a szóban forgó területek kifejezését felismerve (1)-et kapjuk.

Ha az ABC és DBC síkok merőlegesek egymásra, akkor az említett derékszögű háromszögek egyenes szakasszá fajulnak ugyan, azonban $T_1 \equiv T_2$ és $A_1 \equiv A_2$, ennélfogva (2) érvényes marad. Nem érinti meggondolásunk érvényességét az sem, ha e két sík nem merőleges, és a tetraéder a tompa lapszögben helyezkedik el.

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. IV. o. t.)

III. megoldás: Vetítsük (merőlegesen) a tetraédert egy az f_a-ra merőleges S síkra, és legyen a szóbanforgó pontok vetülete rendre A', B', C', D', T'.



Ekkor $T' \equiv A'$, ennélfogva a vizsgálandó 3–3 háromszög vetületei páronként egybeesnek. Tudjuk, hogy síkidom valamely síkon való merőleges vetületének területe egyenlő az idom területéből és a két sík (nem tompa) hajlásszögének koszinuszából képezett szorzattal. Így – S-nek a DBC, ill. ABC lapsíkkal alkotott hegyes szögét α, ill. β-val jelölve –

$$TBC \cos\alpha = T'B'C' = A'B'C' = ABC \cos\beta,$$

és innen

$$TBC : ABC = \cos\beta : \cos\alpha.$$

Ugyanez áll a további két háromszögpárra is, mert S az ACD, ADB lapsíkokkal is β szöget zár be. Valóban, az A csúcson átmenő lapsíkok egyenlő γ szögeket zárnak be f_a-val (gondoljunk az ATT_1, ATT_3, ATT_4 egybevágó derékszögű háromszögekre, ahol T_3, T_4 a T-nek ACD-n, ADB-n levő vetülete), S-sel bezárt szögük pedig pótszöge γ-nak. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

(Sem α, sem β nem lehet derékszög. Ha ugyanis $\alpha = 90^\circ$ volna, akkor – S-et éppen T-n át fektetve – az S-re merőleges f_a-val együtt A benne feküdnék BCD-ben, tetraéderünk elfajult volna. Ugyanez adódik $\beta = 90^\circ$-ból is, mert így A', B', C' egy egyenesbe esnek, és hasonlóan A', B', D' is).

Dániel Gábor (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha a tetraéder A csúcsa körüli lapszögek közül 2 külső és 1 belső lapszög felezősíkjainak közös f_a^* metszésvonalát tekintjük, és ennek BCD-vel való metszéspontját T^*-gal jelöljük, akkor a T^*BC, T^*CD, T^*DB háromszögek területeinek aránya ugyancsak megegyezik az ABC, ACD, ADC lapok területeinek arányával. Meggondolásaink erre az esetre is érvényesek, mert T^* is egyenlő távolságban van ezen három lap mindegyikétől.

2. Több dolgozat arra a helytelen feltevésre támaszkodott, hogy T a BCD háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, vagyis azonos a beírt kör középpontjával. Ez csak akkor igaz, ha f_a merőleges BCD-re.