I. megoldás: Kifejtés helyett igyekszünk áttérni olyan determináns értékének meghatározására, amely egyenlő értékű az eredetivel, és elemekként egyszerűbb kifejezéseket tartalmaz. Vonjuk ki evégett a 3-ik oszlopot a 4-ikből, ezután a 2-ik oszlopot a 3-ikból, végül az első oszlopot a 2-ikból. Ekkor

$$d=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

Itt a 3-ik oszlopnak a 4-ikhől, majd a 2-iknak a 3-ikból való kivonásával adódó új 3-ik és 4-ik oszlop megegyezik (minden elemük 2), ennélfogva $D=0$.

Pósch Margit (Bp. V., Veres Pálné lg. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Annak a determinánsnak is 0 az értéke, amely az adottból úgy áll elő, hogy a zárójelek 1, 2, 3 tagja helyére számtani sorozatot alkotó t_1, t_2, t_3, számokat írunk, tehát pl. a 2-ik oszlop elemei $(a+t_1)^2$, $(b+t_1)^2$, $(c+t_1)^2$, $(d+t_1)^2$. Így ugyanis a fenti első átalakítás után az új oszlopokból rendre kiemelhetjük a t_1, t_2-t_1, t_3-t_2 közös tényezőt ; ezután végezve a második átalakítást a 3-ik és a 4-ik oszlop négy-négy egyenlő elemből áll (t_2, ill. $\mathrm{t}_3-\mathrm{t}_1$).

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

2. Annak az n-ed rendű ($n>4$) determinánsnak is 0 az értéke, amelynek minden egyes eleme egy-egy alap négyzete, az alapok az elsősorban a_1, a_1+t_1, $a_1+t_2, \ldots, a_1+t_{n-1}$, ahol $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ számtani sorozatot alkotnak, ezekből a további sorok alapjait a_1-nek $a_2, a_3, \ldots, a_n$-nel való helyettesítésével képezzük. (Bizonyítható teljes indukcióval.)

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. III. o. t.)

3. Több dolgozat a determináns definíciója szerinti kifejtéssel, igen hosszadalmas számítás után kapta, hogy $D=0$. Ennél az eljárásnál még akkor is célszerűbb átalakítások útján alacsonyabb rendű determinánsokra áttérni, ha az elemek semmi szabályszerűséget sem mutatnak. (Itt viszont sok volt a szabályszerűség.) A kifejtési eljárás tennivalói: az egyes tagok tényezőinek összeállítása, a szorzások elvégzése, és a már elkészített, ill. a még hátralevő tagok nyilvántartása, mind nehezebb műveletek, mint pl. a kivonásokkal való átalakítások és a rendszám fokozatos csökkentése.

II. megoldás: Felhasználhatunk egy a determinánsok legismertebb alkalmazásaira vonatkozó általános tételt: ha egy n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó homogén elsőfokú egyenletrendszernek van a triviális $0,0,\ldots,0$ megoldástól különböző megoldása, akkor az egyenletrendszer determinánsának értéke 0.[1]

Lehet ugyanis felírni olyan négy egyenletből álló, négy ismeretlent tartalmazó homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek determinánsa éppen az adott determináns, és amelynek van a triviálistól különböző megoldása; ennélfogva determinánsunk értéke 0. Valóban, az

$$\begin{aligned} a^2x+(a+1)^2y+(a+2)^2z+(a+3)^2v&=0\\ b^2x+(b+1)^2y+(b+2)^2z+(b+3)^2v&=0\\ c^2x+(c+1)^2y+(c+2)^2z+(c+3)^2v&=0\\ d^2x+(d+1)^2y+(d+2)^2z+(d+3)^2v&=0 \end{aligned}$$

rendszer teljesíti a tétel feltevéseit, mert egy nem triviális megoldása: $x=1$, $y=-3$, $z=3$, $v=-1$, mert e-n a, b, c, d bármelyikét értve:

$$e^2-3(e+1)^2+3(e+2)^2-(e+3)^2=0.$$

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. Gyak. g. II. o. t.)

[1] Lásd pl. *Scharnitzky Viktor:* A determinánsokról, KML, XV., 87. o. (1957 november)