I. megoldás: Függvényünk x-nek $-1 \leq x \leq 1$ értékeire van értelmezve, elég azonban a $0 \leq x \leq 1$ értékekre vizsgálni, mert ha egy ilyen x_0 mellett értéke y_0 akkor a $-1 \leq -x_0 \leq 0$-nak eleget tevő $-x_0$-ra értéke $-y_0$ szokásos elnevezéssel: y páratlan függvény, grafikonjának az origó szimmetria-középpontja). Így ha a függvénynek az x_0 helyen maximuma van, akkor a $-x_0$ helyen minimuma, és megfordítva.

Írjunk $\sqrt{1-x^2}$ helyett z-t. Ekkor $x = \sqrt{1-z^2}$, $y = \sqrt{1-z^2}(z+1)$ és amíg x 0-tól 1-ig nő, addig z 1-től 0-ig fogy, tehát az új függvényt $0 \leq z \leq 1$-re vizsgáljuk. – Így y sehol sem negatív, tehát ha van maximuma, az ugyanott van, ahol a négyzetének, $y^2\left(1-z^2\right) = (z+1)^2 = (1-z)(z+1)^3$-nek. Hogy alkalmazhassuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget, vizsgáljuk ennek 3-szorosát, ugyanis $3y^2 = (3-3z)(z+1)(z+1)(z+1)$-ben a tényezők összege, és így számtani közepe is állandó: $3/2$. Ezt az értéket a tényezők mértani közepe is eléri, tehát van maximuma, éspedig akkor, ha $3-3z = z+1$, azaz $z = 1/2$. Ez a z érték benne van a vizsgált intervallumban, vele az $x = \sqrt{3}/2$ helyen $3y^2$ maximuma $(3/2)^4$, tehát y maximuma $3\sqrt{3}/4$.

Ezek és az előzetes megjegyzés szerint y-nak minimuma is van: $x = -\sqrt{3}/2$-nél $y = -3\sqrt{3}/4$.

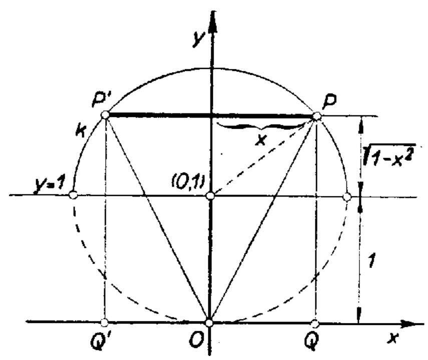
Gy. Molnár Szabolcs (Kisújszállás, Móricz Zs. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás: Célszerű az $x = \sin t$ helyettesítés is, evvel $\sqrt{1-x^2} = |\cos t|$ függvény. A $\sin t$ periodikus volta folytán végtelen sok olyan intervallum van t-re, melyen végig futva x-nek minden értékét pontosan egyszer kapjuk meg. Célszerű a $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ intervallum, ekkor $\cos t \geq 0$, és így $y = \sin t(\cos t + 1) = \sin t + 0{,}5 \sin 2t$

Most már y pozitív értékei közül a maximum keresése speciális esete a 826. feladatban vizsgált kérdésnek[1]: $A = 1$, $B = 0{,}5$-del. Ezekkel az ott kapott képlet szerint $(\cos t)_1 = -1$, ez számunkra kizárt érték, $(\cos t_1)_2 = 1/2$ pedig $(\sin t)_2 = x = \sqrt{3}/2$-re vezet.

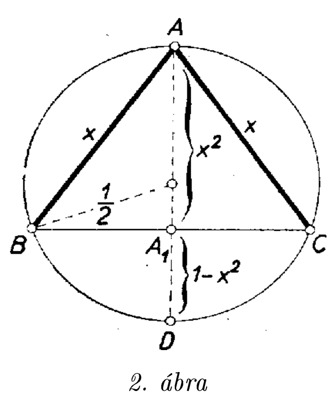
Gaál Sándor (Veszprém, Lovassy L. Gimn. IV. o. t.)

III. megoldás: Nemnegatív x-ekre geometriai értelmezést tulajdoníthatunk kérdésünknek. $z = \sqrt{1-x^2} + 1$ azt a PQ ordinátát adja meg, amely a derékszögű koordinátarendszerben a $(0,1)$ pont körül $r = 1$ sugárral írt k körön, ennek az $y = 1$ egyenes fölötti félkörén fekvő, x abszcisszájú P ponthoz tartozik.



1. ábra

Ha $x \geq 0$, P tükörképe az Y tengelyre P', és vetületeik az X tengelyen Q, ill. Q'; akkor a vizsgálandó $y = xz$ függvény a $QPP'Q'$ téglalap területét adja meg, ami kétszerese a k-ba írt OPP' egyenlő szárú háromszög területének. Ebben az értelmezésben feladatunk megkeresni az egységkörbe írt egyenlő szárú, nem tompaszögű háromszögek közül a legnagyobb területűt – ha ilyen egyáltalán van. Ismeretes, hogy ilyen van: az egyenlő oldalú háromszög.[2]



2. ábra

[1] Megoldását lásd KML. XVI. kötet, 17. o. (1958 január).

[2] Lásd pl. *Rademacher – Toeplitz:* Számokról és alakzatokról, Tankönyvkiadó, 1953, 14 -17., o. (Középiskolai Szakköri Füzetek.) Az idézett helyen annak bizonyítása olvasható, hogy egy adott körbe írható összes háromszögek (konvex n-szögek) közül a szabályosnak van legnagyobb területe.

Ennek oldala $PP' = 2x = \sqrt{3}$, így a maximum helyeként ismét $x = \sqrt{3/2}$-re jutottunk.

Pósa Lajos (Bp. XIII., Sziget utcai ált. isk. V. o. t.)

IV. megoldás: Más jellegű geometriai értelmezése y-nak: az $AD = 1$ átmérőjű körbe írt ABC háromszög kerületének fele, ha $AB = AC = x$. Ha ugyanis AB felező pontja A_1, akkor az ADB, ill. ABA_1 derékszögű háromszögből $AA_1{\cdot}AD = AA_1 = AB^2 = x^2$, és így $BA_1^2 = AA_1{\cdot}A_1D = x^2\left(1-x^2\right)$, tehát a félkerület: $A_1B+BA = x\sqrt{1-x^2}+x = y$. Eszerint feladatunk meghatározni az egységnyi átmérőjű körbe írt, egyenlő szárú háromszögek közül a legnagyobb kerületűt, ha ilyen egyáltalán van. Ismeretes, hogy ilyen van: az egyenlő oldalú háromszög,[3] ennek oldala $x = \sqrt{3}/2$.

Biborka Tamás (Makó, József A. Gimn. II. o. t.)

*Megjegyzés.*Több a III., ill. a IV. megoldáshoz hasonló dolgozat így következtetett: „Minden egyenlő szárú, nem egyenlő oldalú H_1 háromszög helyett lehet venni ugyanazon körbe írt, egyenlő szárú, nagyobb területű, kerületű H_2 háromszöget, ilyen a H_1 szárára, mint alapra a körbe szerkesztett hegyesszögű, egyenlő szárú háromszög. Más szóval: H_1 területe, kerülete növelhető, „javítható”. Ugyanez az eljárás az E egyenlő oldalú háromszöget önmagával pótolja, ennélfogva E területe, kerülete nem javítható. Ezért E területe, kerülete maximális.”

Ez a gondolatmenet azért nem helyes, mert H_2 nem egyenlő oldalú, tehát H_1-et nem E-hez hasonlítja. A növelés lehetősége vagy lehetetlensége magában nem biztosítja maximum létezését.[4]

[3]Lásd pl. *Kürschák-Hajós-Neakomm-Surányi:* Matematikai Versenytételek I. rész, Tankönyvkiadó, 1955, 46–48. o. (Középiskolai Szakköri Füzetek.) Arról az általánosabb tételről van ott szó, hegy egy adott körbeírható *összes* háromszögek közül az egyenlő oldalúnak van legnagyobb kerülete.

[4]Lásd a 2 alatt idézett műnek „Alapvető dolgok maximum feladatokról” c. fejezetét 127–135. o.