Előzetes megjegyzés. A beérkezett dolgozatok legnagyobb része trigonometriai úton bizonyítja az állítást. Közlünk egy ilyet, majd a II. és III. megoldásokon bemutatjuk, hogy elemi úton is célhoz juthatunk. Elemi utat a dolgozatoknak csak csekély hányadrésze követett.

I. megoldás: Vegyük hosszegységnek a körülírt kör átmérőjét, legyen továbbá BA_1 látószöge a nagyobb BA_1 ív pontjaiból x. Ekkor BA_5 látószöge a nagyobb BA_5 ív pontjaiból $36^\circ - x$, továbbá
$BA_1 = \sin x$,
$BA_3 = \sin BA_5A_3\sphericalangle = \sin\left(72^\circ + x\right)$,
$BA_5 = \sin\left(36^\circ - x\right) = \sin\left(144^\circ + x\right)$,
$BA_2 = \sin BA_5A_2\sphericalangle = \sin\left(36^\circ + x\right) = -\sin\left(216^\circ + x\right)$,
$BA_4 = \sin BA_5A_4\sphericalangle = \sin\left(108^\circ + x\right) = -\sin\left(288^\circ + x\right)$.
Ezekkel a bal és jobb oldal különbsége

$$\begin{gathered}BA_1 + BA_3 + BA_5 - BA_2 - BA_4 = \sin x + \sin\left(72^\circ + x\right) + \sin\left(144^\circ + x\right) + \\ + \sin\left(216^\circ + x\right) + \sin\left(288^\circ + x\right) = (1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \\ + \cos 288^\circ\big) \sin x + \big(\sin 72^\circ + \sin 144^\circ + \sin 216^\circ + \sin 288^\circ\big) \cos x.\end{gathered}$$

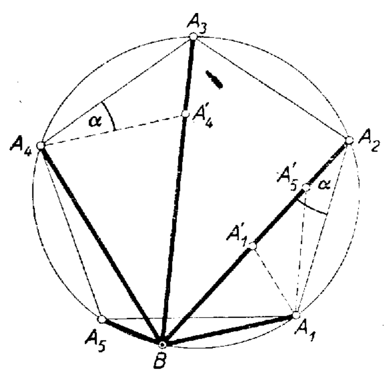
Felismerve, hogy a zárójelekben az egymás utáni szögek 72°-nak egymás utáni többszörösei, a különbség értéke ismert általános azonosságok alapján folytatólag:[1]

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 324^\circ}{2\sin 36^\circ}\right)\sin x + \frac{\sin 180^\circ \cdot \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ}\cos x = 0.$$

Ezzel a bal és jobb oldal egyenlőségét bebizonyítottuk.

Klimó János (Kaposvár, Közgazd. Techn.. III. o. t.)

II. megoldás: A B pont helyzetének megválasztása folytán mindkét BA_3 ívhez tartozó középponti szög (röviden: a BA_3 ív) nagyobb 144°-nál, az A_5-öt tartalmazó BA_4 ív kisebb 144°-nál, így a megfelelő húrokra is áll $BA_3 > BA_4$. Ugyanígy BA_2 nagyobb BA_1 és BA_5 mindegyikénél. Így BA_4-et BA_3-ra B-ből, BA_1-et BA_2-re B-ből és BA_5-öt A_2B-re A_2-ből rámérve az A_4', ill. A_1' és A_5' végpontok a BA_3, ill. BA_2 szakaszon vannak. Húzzuk meg az A_4A_4', A_1A_1', A_1A_5' szakaszokat (1. ábra).



1. ábra

Az $A_4'A_4B$ és $A'A_1B$ egyenlő szárú háromszögekben $A_1'BA_4\sphericalangle = A_3BA_4\sphericalangle = A_2BA_1\sphericalangle = A_1'BA_1 = 36^\circ$, ezért $A_4'A_4B\sphericalangle = A_4A_4'B\sphericalangle = A_1A_1'B\sphericalangle = 72^\circ$. Az $A_1A_2A_1'$, ill. $A_3A_4A_4'$ háromszögekben az ötszög $A_1A_2 = A_3A_4$ oldalaival szemben 108°-os szögek fekszenek, mert ezek az utóbbi két szögnek mellékszögei. Másrészt $BA_2A_1\sphericalangle = \alpha$ jelöléssel $A_5A_4B\sphericalangle = A_5A_2B\sphericalangle = A_5A_2A_1\sphericalangle - BA_2A_1\sphericalangle = 36^\circ - \alpha$, ezért $A_4'A_4A_3\sphericalangle = A_5A_4A_3\sphericalangle - A_5A_4B\sphericalangle - BA_4A_4'\sphericalangle = 108^\circ - \left(36^\circ - \alpha\right) - 72^\circ = \alpha$. Így az $A_1'A_1A_2$ és $A_4'A_3A_4$ háromszögek egybevágók, tehát $A_1'A_1 = A_4'A_3$.

Egybevágók a $A_1A_2A_5'$ és A_1A_5B háromszögek is, mert A_2, ill. A_5 csúcsuknál fekvő szögük és az azt bezáró oldalaik egyenlők, ezért $A_1A_5'; A_2\sphericalangle = A_1BA_52\sphericalangle = 144^\circ$. Ez a szög nagyobb $A_1A_1'A_2\sphericalangle = 108^\circ$-nál, ennélfogva A_5' az $A_1'A_2$ szakaszon fekszik.

Most már az $A_1A_5'A_1'$ háromszögben $A_1A_5'A_1'\sphericalangle = A_5'A_1A_1'\sphericalangle = 36^\circ$, tehát $A_1'A_5' = A_1'A_1 = A_4'A_3$.

Mindezek alapján:

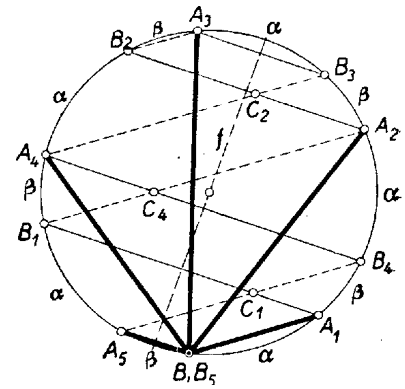
$$\begin{gathered}BA_2 = BA_1' + A_1'A_5' + A_5'A_2 = BA_1 + A_4'A_3 + BA_5 = \\ = BA_1 + BA_3 - BA_4 + BA_5,\end{gathered}$$

amiből a bizonyítandó állítás átrendezéssel adódik.

[1] Lásd pl. *Faragó László:* Matematikai Szakköri Feladatgyűjtemény, 2. kiad. (1955) 52. o. (Középiskolai Szakköri Füzetek.)

Mondik László (Hódmezővásárhely, Bethlen Gimn. IV. o. t.)

III. megoldás: Legyen az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög (röviden P_a) tükörképe az A_5B húr f felező merőlegesére $B_1B_2B_3B_4B_5$ (röviden P_b), ahol $B_5 \equiv B$ (2. ábra).



2. ábra

P_b csúcsai a P_a köré írt k körön vannak, mert f a k-nak átmérője. P_a és P_b szabályos voltuk folytán egymásba k középpontja körül való forgatással is átvihetők, pl. $A_1, A_2, \ldots, A_5$ egy $72°$-nál kisebb forgatással átvihetők B_4, B_3, B_2, B_5-be, ez utóbbi csúcsok k-n rendre a rövidebb $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_5A_1$ ívre esnek. Így a rövidebb $A_5B_5, B_5A_1, A_1B_4, B_4A_2, \ldots, A_4B_1, B_1A_5$ ívek váltakozva egyenlők, legyen röviden $\widehat{B_5A_1} = \widehat{B_4A_2} = \ldots = \widehat{B_1A_5} = \alpha$ és $\widehat{A_5B_5} = \widehat{A_1B_4} = \ldots = \widehat{A_4B_1} = \beta$. A P_a és P_b oldalai által k-ból lemetszett (rövidebb) ívek mindegyike egyenlő a $\alpha + \beta = 72°$-kal.

k-nak az f-re merőleges és így egymással párhuzamos A_1B_1,, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 húrjai rendre egyenlők a bizonyítandó egyenlőségben szereplő BA_2, BA_4, BA_1, BA_3 húrokkal, mert a megfelelő húrok végpontjai közé eső rövidebb ív hossza rendre $2\alpha + \beta$, $2\beta + \alpha$, α és $3\alpha + 2\beta$ vagy $2\alpha + 3\beta$ (aszerint, hogy $\alpha \leq \beta$, ill. $\alpha > \beta$). Eszerint elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 = A_1B_1 + A_2B_2.$$

Az A_2B_1, A_3B_2, A_4B_3, A_5B_4 és A_1B_5 húrok ugyancsak párhuzamosak, mert két-két egymás utáni húr között két-két $\alpha + \beta$, α, $\alpha + \beta$, β hosszúságú ív van. Ezért, A_1B_1, A_2B_2, A_4B_4-nek A_5B_4, A_4B_3, A_2B_1-gyel való metszéspontját C_1, C_2, C_4-gyel jelölve az $A_5B_5A_1C_1$, $B_1C_1B_4C_4$, $A_4C_4A_2C_2$, $B_2C_2B_3A_3$ négyszögek paralelogrammák. Ennélfogva

$$A_3B_2 + A_4B_4 + A_5B_5 = B_2C_2 + A_4C_4 + C_4B_4 + C_1A_1 = B_2C_2 + C_2A_2 + B_1C_1 + C_1A_1 = B_2A_2 + B_1A_1,$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. A használt gondolatmenettel bármely páratlan oldalszámú szabályos sokszögre bizonyítható. A fent bebizonyított tétel következő általánosítása: ha az $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ szabályos sokszög ($n \geq 1$) köré írt kör kisebbik A_1A_{2n+1} ívének valamely pontja B, akkor

$$BA_1 + BA_3 + BA_5 \ldots + BA_{2n+1} = BA_2 + BA_4 + \ldots + BA_{2n}. \tag{1}$$

(Hogy páros oldalszámú sokszögre a gondolatmenet nem használható, ez azon múlik, hogy ekkor az $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ sokszög és ebből az $A_{2n}B \equiv A_{2n}B_{2n}$ húrnak f felező merőlegesére való tükrözéssel előálló $B_1B_2 \ldots B_{2n}$ sokszög $4n$ csúcsából álló alakzat a kör középpontjára is tükrös (mert mindkét $2n$-szög tükrös a középpontra), ezért az $A_{2n}B_{2n} = \beta$ ívvel szemben fekvő A_nB_n ív hossza ugyancsak β (páratlan oldalszám esetén viszont, mint könnyen belátható, az $\widehat{A_{2n+1}B}_{2n+1} = \beta$-val szemben $\widehat{A_{n+1}B}_{n+1} = \alpha$ fekszik). Ezért minden az$A_{2n}B_{2n}$-nel párhuzamos A_kB_k húr végpontjai között mindkét A_kB_k íven a β ívek száma páratlan, és így ezen húrok rendszerében általában nincs az (1) hal oldalán álló húrokkal egyenlő. Ugyanis a kört az (1) bal oldalán álló húrok bármelyikével kettévágva mindkét íven páros számú β ív van. – $2n$ oldalú szabályos sokszögre nem is igaz az (1)-nek megfelelő állítás.)

A fenti általánosítást kimondta és a Ptolemaios-tétel felhasználásával be is bizonyította *Bollobás Béla* (Bp. V., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. II. o. t.). A dolgozatok kisebb része magát az eredeti állítást is így bizonyította. Egy ilyen a következő.

IV. megoldás: Válasszuk hosszúságegységnek az ötszög oldalát és legyen átlóinak közös hossza d. Ha B az A_1A_5 ív valamelyik végpontja, akkor a bizonyítandó egyenlőség fennáll, mert mindkét kifejezés értéke $1 + d$.

Ha B az ív belső pontja (1. ábra), akkor a BA_3, BA_2, BA_4 húrokat kifejezhetjük BA_1, BA_5 és d-vel úgy, hogy A_1, B, A_5-höz negyedik csúcsnak rendre A_3-at, A_2-t, A_4-et vesszük és felírjuk e négyszögekre Ptolemaios tételét:

$$BA_3 = d \cdot BA_1 + d \cdot BA_5, \quad BA_2 = d \cdot BA_1 + BA_5, \quad BA_4 = BA_1 + d \cdot BA_5.$$

Ezeket a bal, ill. jobb oldalon behelyettesítve mindkét oldalon $(1 + d)(BA_1 + BA_5)$ áll. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Cséfalvay Klára (Bp. XIV., Teleki Blanka lg. IV. o. t.)