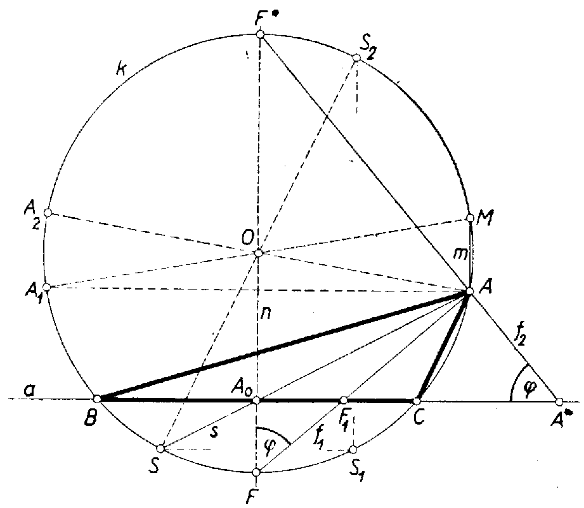
Képzeljük a feladatot megoldottnak, és legyen az ABC háromszög A csúcsából húzott m magasság, f_1 szögfelező, ill. s súlyvonal második metszéspontja az O középpontú k körülírt körrel rendre M, F, S. Legyen továbbá a BC oldalfelezőpontja (az AS szakaszon) A_0.



Ismeretes, hogy f_1, és így F is felezi k-nak az A-t nem tartalmazó BC ívét, így $FO = n$ felező merőlegese $BC = a$-nak, ezért egyrészt átmegy A_0-on, másrészt párhuzamos $AM = m$-mel.

Ezek alapján a szerkesztés szakaszai: M, F, S meghatározzák O-t és k-t; az FO-val M-en át húzott m párhuzamos k-t másodszor A-ban metszi; AS és FO metszéspontja A_0; az A_0-on át FO-ra merőleges húr végpontjai B és C. – Minden lépés egyértelmű, ezért ha egyáltalán van, úgy 1 megoldás van.

k szerkeszthetőségének feltétele, hogy M, F, S különbözők legyenek és ne essenek egy egyenesbe; ilyenkor mindig kapunk A-t (lehet $A \equiv M$ is); B, C akkor és csak akkor jönnek létre, ha A_0 a k-n belül van, ehhez szükséges és elegendő, hogy FO válassza szét S és A-t, vagyis már S és M-et is.

Elfajult háromszög adódik, ha $BC \equiv AS$, azaz $AS \perp OF$; ekkor $AS \perp AM$, tehát SM átmérője k-nak. – Megeshet, hogy F-ben az A-ból kiinduló f_2 külső szögfelező metszi k-t, – hiszen F helyett az FF^* átmérőnek F^* végpontját véve ugyanezen A, B, C pontokat nyerjük. Ilyenkor f_1 az F^* ponton megy át.

F-en valóban a belső szögfelező megy át, ha F a BC-nek ugyanazon partján fekszik, mint S, vagyis az A-val ellenkező parton. Így A az F^*S_1 íven van, – ahol S_1 az S-nek tükörképe FO-ra, – ennélfogva M az FS_2 íven, ahol S_2 az S_1-nek tükörképe az FO-ra merőleges átmérőre. Ámde így SS_2 átmérő; ennélfogva az SFM szög szárai között félkörnél nagyobb íve fekszik k-nak, ez a szög tompa szög.

Ez a követelés $90^\circ < SFM\sphericalangle < 180^\circ$ alakban egyetlen feltétele a megoldhatóságnak, mert k létezését is biztosítja, valamint azt is, hogy A_0 belső pont legyen.

Ha M, F és S közül bármelyik kettő egybeesik, akkor ugyanez áll m, f_1 és s közül a megfelelő kettőre. Ebből mindig az következik, hogy ABC egyenlő szárú háromszög, így ezen egyenesek, ill. pontok harmadika is egybeesik az első kettővel, ennélfogva a feladat határozatlan.

Náray Miklós (Bp. VIII., Széchenyi I. Gimn. IV. o. t.)