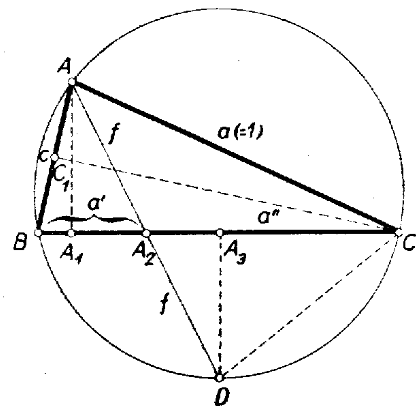
I. megoldás: A háromszögről nincs lineáris (szakasz-) adatunk, ennélfogva valamely szakaszát választhatjuk hosszúság egységnek. Legyen ez a szár: $AC = BC = 1$. Így elegendő az $AB = c$ alapot meghatároznunk. Erre a háromszög egyenlőtlenségből: $0 < c < 2$.



Hogy a felezett A_1A_3 szakasz két részét kifejezhessük, írjuk fel A_1, A_2, A_3-nak B-től való távolságát. Ezekből a részek hosszát kivonással képezhetjük, mert A_1 ugyanúgy B és C között van, mint A_2 és A_3, hiszen egyenlő szárú háromszög alapján, így B-nél hegyes szög van. Pontjaink sorrendje a BC oldalon kétféle lehet: vagy B, A_1, A_2 A_3, C, vagy B, A_3, A_2, A_1, C. Mindkét lehetőség mellett a felezési tulajdonságot a

$$BA_2 - BA_1 = BA_3 - BA_2 \tag{1}$$

egyenlőség fejezi ki. Legyen a C-ből kiinduló magasság talppontja C_1, így feltevésnél fogva $AC_1 = c/2$, A közös hegyes szöggel bíró BA_1A és BC_1C derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$BA_1 : BA = BC_1 : BC, \qquad \text{és így} \qquad BA_1 = \frac{BA \cdot BC_1}{BC} = \frac{c^2}{2}.$$

Az AA_2 szögfelező által a BC oldalon létrehozott szakaszok $BA_2 : A_2C = BA : AC = c : 1$ arányából átalakítással $BA_2 : (BA_2 + A_2C) = c : (c+1)$, innen $BA_2c/(c+1)$. – Végül $BA_3 = 1/2$.

(1)-ből:

$$2BA_2 = BA_1 + BA_3,$$

és fenti kifejezéseinkkel, majd szokásos rendezéssel ($c \neq -1$):

$$\frac{2c}{c+1} = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2},$$

$$c^3 + c^2 - 3c + 1 = 0. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy itt az együtthatók összege $1 + 1 - 3 + 1 = 0$; eszerint $c = 1$ gyöke (2)-nek. Ezt azonban mellőzhetjük, mert Így a háromszög egyenlő oldalú, A_1, A_2, A_3 egybeesnek, ami lényegében elfajult megoldása kérdésünknek.

(2) bal oldalát a $c - 1$ gyöktényezővel osztva a

$$c^2 + 2c - 1 = 0$$

egyenlet negatív gyöke nem felel meg feladatunk geometriai tartalmának, így $c = -1 + \sqrt{2}$. Ekkor a háromszög AB alapján levő szögek nagysága $78°3'$, a szárak közti szög pedig $23°54'$

Losonczi László (Miskolc, Gábor Á. Kohóip. t. IV. o.t.)

II. megoldás: A háromszög alapjának és szárának arányát a szögfelező hosszáról a 698. feladatban bebizonyított tétel[1] felhasználásával is megállapíthatjuk. Legyenek a háromszög oldalai: $AC = BC = a$, $AB = c$, továbbá $BA_2 = a'$, $A_2C = a''$, $AA_2 = f$. Ekkor az idézett tétel szerint

$$f^2 = ac - a'a''. \tag{3}$$

Ismeretes továbbá, hogy az AA_2 szögfelező átmegy a háromszög köré írt kör azon BC ívének D felezőpontján, amely az A csúcsot nem tartalmazza. A felezés folytán $DA_3 \perp BC$, így az A_2A_1A és A_2A_3D háromszögek derékszögűek és egybevágók, ugyanis $A_1A_2 = A_2A_3$ és az A_2-nél levő szögek egyenlők, mert csúcsszögek, ennélfogva $DA_2 = AA_2 = f$.

[1] Minden ABC háromszögben az AA_2 szögfelezőre $AA_2^2 = AB \cdot AC - BA_2 \cdot CA_2$ (KML. XII. kötet 78. o., 1956 március).

Ennek felhasználásával a BAA_2 és DCA_2 háromszögek hasonlóságából (ugyanis szögeik egyenlők) $BA_2 : AA_2 = DA_2 : CA_2$, és így

$$f^2 = DA_2 \cdot AA_2 = BA_2 \cdot A_2 = a'a''. \tag{4}$$

(3) és (4)-ből

$$2a'a'' = ac. \tag{5}$$

Másrészt a szögfelezőre ismert tétel szerint:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{c}{a}. \tag{6}$$

Így (5) és (6)-ból

$$a' = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad a'' = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Végül az egyenlőszárúság alapján, $a' + a'' = a$ felhasználásával

$$\frac{c+a}{\sqrt{2}} = a, \quad \text{és így} \quad c = \left(\sqrt{2} - 1\right)a.$$

Ez az eredmény megfelel a fentinek.

Tatai Péter (Bp. XIV. ker., I. István Gimn. IV. o. t.)