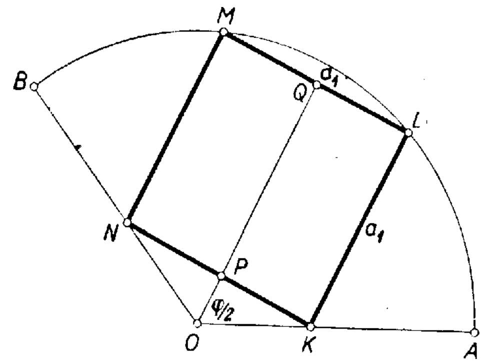
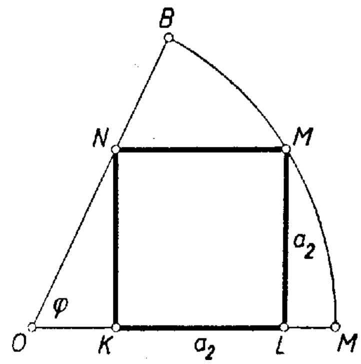
**Megoldás:** Kézenfekvőbb az olyan beírás (1. ábra), hogy a $KLMN$ négyzet $PQ$ oldalfelezője az $OAB$ körcikk szimmetriatengelyébe esik, de $\varphi \le 90°$ esetén olyan is lehetséges, hogy a körcikk ívére egy, a határoló sugaraira pedig két, ill. egy csúcsa esik a négyzetnek (2. ábra).[1]




*1. ábra*




*2. ábra*

Eszerint miután majd e két lehetőség mellett felírtuk $\varphi$ függvényeként a négyzet $a_1$, ill. $a_2$ oldalából $t_1(\varphi)$, ill. $t_2(\varphi)$ területét, a $0° < \varphi \le 90°$ szögekre meg kell vizsgálnunk, hogy $t_1$ és $t_2$-nek melyike nagyobb. A nagyobb értéket adó kifejezés lesz a keresett függvény.

Az 1. ábra $OQM$ derékszögű háromszögéből a Pythagoras-tétel alapján, majd $OP$-t az $OPN$ derékszögű háromszögből $\varphi/2$-vel kifejezve

$$OM^2 = 1 = OQ^2 + QM^2 = (OP + PQ)^2 + \frac{a_1^2}{4} = \left(NP \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + a_1\right)^2 + \frac{a_1^2}{4} =$$
$$= \left(\frac{a_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + a_1\right)^2 + \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{4}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 2\right)^2 + 1\right],$$

és így

(1) $$t_1 = t_1(\varphi) = a_1^2 = \frac{4}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 2\right)^2 + 1}, \text{ ha } 0° < \varphi \le 180°.$$

Hasonlóan a 2. ábra $OLM$ derékszögű háromszögéből

$$OM^2 = 1 = OL^2 + LM^2 = \left(OK + a_2\right)^2 + a_2^2 = (NK \operatorname{ctg}\varphi + a_2)^2 + a_2^2 =$$
$$= (a_2 \operatorname{ctg}\varphi + a_2)^2 + a_2^2 = a_2^2\left[(\operatorname{ctg}\varphi + 1)^2 + 1\right],$$

és így

$$t_2 = t_2(\varphi) = a_2^2 = \frac{1}{(\operatorname{ctg}\varphi + 1)^2 + 1}, \text{ ha } 0° < \varphi \le 90°.$$

Elvben egyszerűbb volna a nagyobb területet $t_1$ és $t_2$ különbsége előjelét megvizsgálva kiválasztani. Mivel azonban $t_1$ és $t_2$ pozitív, és csak nevezőik változók, így a másodikat 4-gyel bővítve az lesz a nagyobb, amelyikben a (módosítás utáni) nevező kisebb. Vizsgáljuk tehát ezek

$$k(\varphi) = \left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 2\right)^2 + 1 - 4(\operatorname{ctg}\varphi + 1)^2 - 4$$

[1] Meg lehet mutatni, hogy más megfelelő beírási lehetőség nincs.

különbségének előjelét a két függvény értelmezési tartományának közös részében, vagyis ha $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$

Fejezzük ki $\operatorname{ctg}\varphi$-t is $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} = x$-szel:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{x^2-1}{2x},$$

így a különbség $x$ függvényeként:

$$k(\varphi) = k_1(x) = (x+2)^2 - 4\left(\frac{x^2-1}{2x} + 1\right)^2 - 3 = \frac{1}{x^2}(-x^2+4x-1) = \frac{fx}{x^2}.$$

Meg kell állapítanunk $k_1(x)$-nek az új változó szerinti értelmezési tartományát. $0^\circ < \dfrac{\varphi}{2} \leq 45^\circ$ folytán $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} = x \geq 1$; ezekre az $x$-ekre vizsgáljuk $k_1(x)$-et. Előjele csak az $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = 3 - (x-2)^2$ másodfokú függvény előjelétől függ. Ez pozitív a $2-\sqrt{3}$ és $2+\sqrt{3}$ közti $x$-ekre, minden más $x$-re negatív, vagy 0, azonban az előbbi érték nem tartozik bele $k_1(x)$ értelmezési tartományába. Így $k_1(x) = k(\varphi)$ egyszer megváltoztatja előjelét.

Eszerint $t_1$ és $t_2$ nagyságviszonya nem állandó, hanem egyszer ellentétesre fordul, éspedig $x = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} = 2+\sqrt{3}$-nál; ekkor $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{3}$, és így $\varphi = 30^\circ$, és $\varphi/2 = 15^\circ$. Valóban, $k_1(2+\sqrt{3}) = k(30^\circ) = 0$, és $t_1(30^\circ) = t_2(30^\circ) = \left(5-2\sqrt{3}\right)/13$.

A nagyságviszonyról előrebocsátottak értelmében $1 \leq x = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} < 2+\sqrt{3}$ esetén, vagyis mivel a kotangens függvény csökkenő, $45^\circ \geq \varphi/2 > 15^\circ$, másképpen $90^\circ \geq \varphi > 30^\circ$ esetén $k_1(x) = k(\varphi)$ pozitív, tehát $t_1$ kisebb $t_2$-nél, a körcikk ilyen nyílásszöge esetén a nemszimmetrikusan beírt négyzet területe nagyobb. – Viszont $x = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} > 2+\sqrt{3}$, azaz $\varphi/2 < 15^\circ$ $\varphi < 30^\circ$ esetén az előjel és a nagyságviszony ellentétes, a szimmetrikusan beírt négyzet a nagyobb területű.

$\varphi > 90^\circ$ mellett csak az első beírási mód használható, akkor $t_1$ adja a keresett függvényt. – Mindezek szerint a keresett $t(\varphi)$ függvényt két képlettel így írhatjuk fel:

$$t(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{4}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + 2\right)^2 + 1}, & \text{ha } 0^\circ < \varphi \leq 30^\circ \text{ és ha } 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ, \\[2ex] \dfrac{1}{\left(\operatorname{ctg}\varphi + 1\right)^2 + 1}, & \text{ha } 30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ. \end{cases}$$

$\varphi = 30^\circ$-ra mindkét képlet érvényes.

*Várady Gábor* (Győr, Révai M. g. III. o. t.)

*Megjegyzés.* Figyeljük meg, hogy $90^\circ$-nál $t(90^\circ) = t_2(90^\circ)$ nagyobb, mint $t_1(90^\circ)$, és nagyobb szögekre $t(\varphi)$ ehhez a kisebb értékhez csatlakozik. Első pillantásra meglepő, hogy eszerint pl. $90^\circ$-os körcikkből nagyobb négyzetlemezt lehet kivágni, mint $100^\circ$-osból; ne felejtsük el azonban azt a követelményt, hogy a négyzetlemez csúcsainak a körcikklemez kerületén kell lenniük.