I. megoldás: Az (1) bal oldalának tényezői az x és y-nak szimmetrikus függvényei, várható tehát, hogy kifejezhetők $x+y$ és xy-nal, az elemi szimmetrikus függvényekkel. Valóban

$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy\,(x+y)\,,$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy,$

így (2) figyelembevételével (1)-ből $xy=w$-re kapunk másodfokú egyenletet:

$$(8-6xy)\,(4-2xy)=64, \quad 3w^2-10w-8=0. \tag{3}$$

Innen $w_1=-2/3$, $w_2=4$.

Ezeket (2)-hez hozzákapcsolva x, y-t az

$$u^2-2u+w=0$$

egyenlet gyökei adják, ahol u az x és y bármelyikét jelentheti. Ebből $u_1=1\pm\sqrt{1-w}$. Csak w_1-gyel kapunk valós megoldást, a két gyökpár

$$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{5/3}, \\ y_1=1-\sqrt{5/3}; \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \begin{cases} x_2=y_1, \\ y_2=x_1. \end{cases}$$

Bencsik lstván (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

II. megoldás: A (2) követelését így is mondhatjuk: x és y számtani közepe 1. Ez azt is jelenti, hogy az egyik ugyanannyival nagyobb 1-nél, mint amennyivel a másik kisebb 1-nél.

Az eltérést v-veI jelölve:

$$x=1+v, \qquad y=1-v, \tag{4}$$

és ezeket (l)-be beírva v-re egyismeretlenes, redukálható negyedfokú egyenletet kapunk:

$$\left(2+6v^2\right)\left(2+2v^2\right)=64,$$

$$3v^4+4v^2-15=0. \tag{5}$$

Innen $(v^2)_1=-3$, $(v^2)_2=5/3$. Valós v-értéket csak az utóbbiból kapunk, $v=\pm\sqrt{5/3}$-dal a fenti x, y értékpárok adódnak.

Grünfeld Péter (Bp. IX., József A. gépip. t. III. o. t.)

III. megoldás: (2)-ből $y=2-x$-et (1)-be helyettesítve x-re az

$$x^4-4x^3+\frac{22}{3}x^2-\frac{20}{3}x-\frac{8}{3}=0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk. Itt az együtthatók teljesítik annak feltételét, hogy a bal oldal egy $x=z+\lambda$ alakú helyettesítéssel z^4+Az^2+B alakra legyen hozható[1], ugyanis

$$a^3-4ab+8c=-64+\frac{352}{3}-\frac{160}{3}=0,$$

éspedig λ megfelelő értéke: $\lambda=-a/4=+1$. Az $x=z+1$ helyettesítéssel lényegében ismét (5)-re jutunk.

Simonfai László (Bp. II., Rákóczi F. g. IV. o. t.)

[1] Az $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ függvény akkor és csak akkor írható egy $x=z+\lambda$ alakú helyettesítéssel $\varphi(z)=z^4+Az^2+B$ alakba, ha $a^3-4ab+8c=0$, és λ megfelelő értéke: $\lambda=-a/4$ (KML. XI. kötet 57. o., 656. feladat, 1955 október).