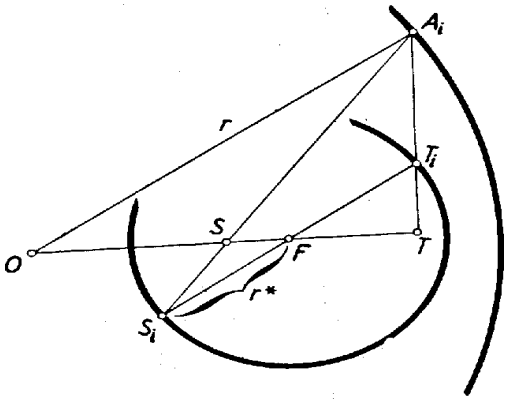
Legyen az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder (jelöljük röviden **N**-nel) A_i csúcsával szemben fekvő lap súlypontja S_i. **N**-nek S súlypontja az A_iS_i súlyvonalat úgy negyedeli, hogy $S_iS = A_iS/3$, ezért a S_i súlypontokkal meghatározott $\mathbf{N}^*$ tetraéder előállítható **N**-ből az S középpontból való 1/3 arányú kicsinyítéssel és az S-re való tükrözéssel is. Ennélfogva ugyanez a transzformáció állítja elő $\mathbf{N}^*$-nak G^* körülírt gömbjét és ennek F középpontját a **N** körül írt G gömbből és ennek O középpontjából (l. ábra).

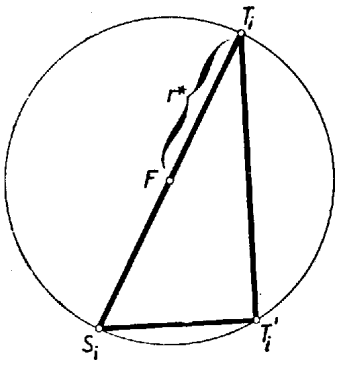


1. ábra

Így F az OS szakasznak S-en túli, T felé való meghosszabbításán van, és $FS = OS/3 = TS/3$, vagyis F az ST szakasznak S-hez közelebbi harmadolópontja, továbbá G^* és G-nek FS_i, ill. OA_i sugaraira $FS_i = OA_i/3$ (az állítás 2. része). Másrészt $TF = TS - FS = 2TS/3 = TO/3$, vagyis F egyszersmind a TO szakasznak T-hez közelebbi harmadolópontja (az állítás 1. része).

Az eddig bebizonyítottak szerint G^* a G-ből egyszerűbben, tükrözés nélkül is előállítható, éspedig a T középpontból való 1/3 arányú kicsinyítéssel, ugyanis S a két gömbnek belső, T pedig külső hasonlósági pontja. Ebben a transzformációban az A_i pont megfelelője a TA_i szakasznak T-hez közelebbi T_i harmadolópontja; és mivel G átmegy A_i-n, azért G^* valóban átmegy T_i-n (az állítás 3. része).

Legyen végül **N**-nek az A_i-vel szemben fekvő lapján – amelyen S_i is van – T_i-nek merőleges vetülete T_i'; még azt kell megmutatnunk, hogy ezen is átmegy G^* (2. ábra).



2. ábra

Ha T_i' egybeesik S_i-vel, akkor nincs mit bizonyítanunk. Az ellentétes esetben S_i, T_i és T_i' derékszögű háromszöget alkotnak, S_iT_i a T_i'-ből derékszög alatt látszik, így Thales tételének megfordítása alapján T_i' az S_iT_i átmérőjű gömbön van. Ez azonban éppen G^*, mert a fenti két kicsinyítésben az FS_i és FT_i sugarak mindegyikének OA_i felel meg, ezek tehát párhuzamosak és mivel F pontjuk közös, így egymásnak meghosszabbításai, tehát S_iT_i átmérője G^*-nek.

Hajna János (Pécs, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. A T_i pontokkal meghatározott tetraéder **N**-nek T-ből 1/3 arányú kicsinyítettje és $\mathbf{N}^*$-nak S-re vonatkozó tükörképe.

2. Ha a tetraéder ortocentrikus, akkor T az M magasságpontba esik és a G^* gömb az első Feuerbach-féle gömb. Ekkor T_i az $A_iT \equiv A_iM$ magasságvonalnak pontja, tehát T_i' azonos A_i-nek a szemben fekvő lapon való A_i' vetületével, a magasságvonal talppontjával, az A_i-vel szemközti lap M_i magasságpontjával. Könnyen belátható, hogy fordítva, ha valamennyi T_i' egybeesik A_i'-vel, akkor $T_i' \equiv M_i$, és a tetraéder ortocentrikus, T a magasságpont.