I. megoldás: A második egyenlet gyökeit x_1, x_2-vel jelölve az első egyenlet gyökei x_1+1 és x_2+1. Így a gyökök és az együtthatók összefüggései alapján az x_1, x_2, p és q ismeretlenekre négy egyenletet írhatunk fel:

$$x_1+x_2=-p, \tag{1}$$

$$x_1x_2=q, \tag{2}$$

$$x_1+x_2+2=p^2, \tag{3}$$

$$(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=pq. \tag{4}$$

(1) és (2) figyelembevételével (3) és (4)-ből p és q-ra a következő egyenlet-rendszert kapjuk:

$$-p+2=p^2, \tag{5}$$

$$q-p+1=pq. \tag{6}$$

(5)-ből $p_1=-2$, $p_2=1$, a (6)-ból átalakítással adódó

$$(p-1)(q+1)=0 \tag{6a}$$

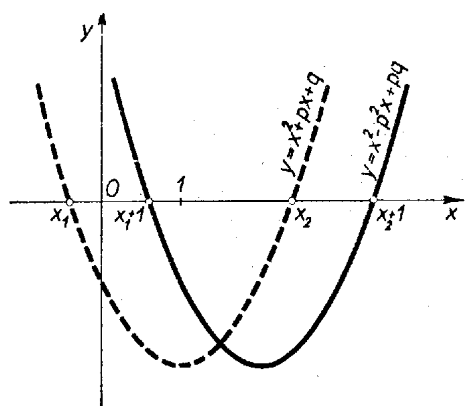
egyenletből pedig p_1-gyel $q_1=-1$, p_2-vel viszont az egyenlet bármely q számra teljesül.

Az első esetben az adott egyenletek így alakulnak: $x^2-4x+2=0$ és $x^2-2x-1=0$, gyökeik $2\pm\sqrt{2}$, ill. $1\pm\sqrt{2}$, és ezek valóban teljesítik a követelményt.

Ugyanez áll a második esetben az $x^2-x+q=0$ és $x^2+x+q=0$ egyenletek $(1\pm\sqrt{1-4q})/2$, ill. $(-1\pm\sqrt{1-4q})/2$ gyökeire. Ezek akkor és csak akkor valósak, ha $1-4q\geqq 0$, azaz $q\leqq 1/4$.

Dániel Gábor (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az (5), (6) egyenletrendszerhez grafikus meggondolással is eljuthatunk. Az adott egyenletek hal oldalát mint másodfokú függvényt ábrázoló két parabola egyrészt egybevágó, mert x^2 együtthatójának abszolút értéke mindkettőben 1, másrészt egyforma állású, mert ezen együtthatók előjelben is egyeznek, mindkettőnek alul van a csúcsa.



Így egymásból (párhuzamos) eltolással is előállíthatók. Az eltolás nagysága a gyökökre, mint a parabolák és az X-tengely metszéspontjainak abszcisszáira előírt követelmény folytán éppen 1 egységnyi az X-tengellyel párhuzamosan, éspedig az első egyenlet bal oldalát ábrázoló parabola 1 egységgel jobbra van eltolva a másikhoz képest (l. az ábrát). Ekkor pedig az első egyenlet bal oldalán álló függvény $y=(x-1)^2+p(x-1)+q=x^2-(2-p)x+(1-p+q)$ alakban is felírható, és ez akkor és csak akkor azonos az $y=x^2-p^2x+pq$ függvénnyel, ha tagról tagra megegyeznek. Az (5), (6) rendszer éppen ezt, az elsőfokú tag együtthatójának, ill. az állandó tagnak egyenlőségét követeli.

Mezey Ferenc (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)