Hogy a fellépő logaritmusoknak legyen értelmük, megoldásul csak olyan x fogadható el, amelyre px, qx, rx megengedett logaritmus-alapszámok, vagyis 1-től különböző pozitív számok. Így p, q, $r > 0$ folytán $x > 0$, továbbá $x \neq 1/p$, $1/q$, $1/r$. Ha px, qx, rx közül legalább egyiknek értéke 1, akkor $a \neq 1$ esetén az egyenlet bal oldala értelmetlen, $a = 1$ mellett pedig határozatlan. Mindenképpen fel kell tennünk továbbá, hogy $a \neq 1$, különben az egyenlőség minden megengedett x-re teljesülne.

Térjünk át egyetlen logaritmusalapnak, p1. a 10-nek használatára. A $\log_b c = (\lg c)(\lg b)$ képlet alkalmazásával egyenletünk így alakul:

$$\frac{k \lg a}{\lg px} + \frac{l \lg a}{\lg qx} + \frac{m \lg a}{\lg rx} = \lg a \left(\frac{k}{\lg p + \lg x} + \frac{l}{\lg q + \lg x} + \frac{m}{\lg r + \lg x} \right) = 0,$$

és lg$a \neq 0$-val egyszerűsítve, továbbá a $\lg p = P$, $\lg q = Q$, $\lg r = R$, $\lg x = y$ jelölésekkel

$$\frac{k}{P+y} + \frac{l}{Q+y} + \frac{m}{R+y} = 0.$$

[1]

Innen – előre kizárva azokat az y-okat, amelyekkel a nevezők valamelyike 0-vá válhatna (ez a követelmény természetesen azonos azzal, hogy px, qx, rx egyike sem egyenlő 1-gyel) – a törtek eltávolításával és rendezéssel

$$k\,(y+Q)\,(y+R) + l\,(y+P)\,(y+R) + m\,(y+P)\,(y+Q) = 0, \tag{1}$$

másképpen

$$(k+l+m)\,y^2 + [k\,(Q+R) + l\,(P+R) + m\,(P+Q)]\,y + \\ + (kQR + lRP + mPQ) = 0, \tag{2}$$

vagy

$$(k+l+m)\,y^2 + [(k+l+m)\,(P+Q+R) - (kP + lQ + mR)]\,y + \\ + (kQR + lRP + mPQ) = 0. \tag{3}$$

Ez az egyenlet a k, l, m, P, Q, R paraméterektől függő együtthatóknak, ill. az y-t nem tartalmazó állandónak 0, ill. 0-tól különböző volta szerint más-más típusú, emiatt ezeket az eseteket külön vizsgáljuk. Legyenek y^2, y és y^0 együtthatói rendre A, B, C, így a vizsgálandó egyenlet:

$$Ay^2 + By + C = 0. \tag{4}$$

Diszkriminánsa a következő áttekinthető alakra hozható:

$$B^2 - 4AC = [k\,(R-Q)]^2 + [l\,(P-R)]^2 + [m\,(Q-R)]^2 - 2kl\,(R-Q)\,(P-R) - \\ -2km\,(R-Q)\,(Q-P) - 2lm\,(P-R)\,(Q-P) = U^2 + V^2 + W^2 - \\ -2UV - 2VW - 2WU,$$

ahol $U = k(R-Q)$, $V = l(P-R)$, $W = m(Q-P)$.

I*a)* Ha $A \neq 0$ és $B^2 - 4AC \geqq 0$, akkor (4) másodfokú és két, ill. egy valós megoldása van: y_1, y_2. Ha ezek $-P$, $-Q$, $-R$ mindegyikétől különbözők, akkor

$$x_1 = 10^{y_1}, x_2 = 10^{y_2}.$$

(A diszkrimináns eltűnése esetén x_2 felírása természetesen felesleges.)

I*b)* Akkor is másodfokú a (4) egyenlet, ha $A \neq 0$ és $B^2 - 4AC < 0$, ekkor azonban nincsenek valós gyökei, x-re sincs megoldás. (Van ilyen eset, pl. $U = V = W \neq 0$ mellett $-3U^2 < 0$).

II. Ha $A = 0$ és $B \neq 0$, akkor (4) elsőfokú és egyértelműen megoldható, a (3) alakra gondolva

$$y_0 = -\frac{C}{B} = \frac{kQR + lRP + mPQ}{kP + lQ + mR},$$

és ebből $x_0 = 10^{y_0}$ feltéve ismét, hogy y_0 különbözik $-P$, $-Q$, $-R$ mindegyikétől, másképpen: x_0 a p, q, r paraméterek egyikének sem reciprok értéke. – Ilyenkor $A = k + l + m = 0$ alapján k, l, m egyike kifejezhető a másik kettővel, tehát lényegében csak öt paraméter van.

---

[1]Megjegyezzük, hogy 10-es helyett bármely más (megengedett) logaritmusok használatára áttérhettűnk volna, pl. a-alapúra is. Így azonban látjuk, hogy a csak látszólag paramétere az adott egyenletnek, mert itt már nem szerepel.

III. Ha $A=0$ és $B=0$, akkor (4) nem tartalmazza y-t, így x sem határozható meg, vagyis (1)–(4) mindegyike is és az adott egyenlőség is vagy minden y-ra, ill. x-re teljesül, vagy egyre sem. Ekkor az $A=B=0$ egyenlőségrendszerből k, l, m aránya kifejezhető P, Q, R-rel:

$$k:l:m=(R-Q):(P-R):(Q-P)\,,$$

másképpen :

$$k=\lambda\,(R-Q)\,,l=\lambda\,(P-R)\,,m=\lambda\,(Q-P)\,,$$

vagyis négy paraméter van: P, Q, R és λ, és ezekre a $klm\neq 0$ feltevés folytán egyrészt $\lambda\neq 0$, másrészt P, Q, R és így p, q, r is, egymástól különbözők. Ezekkel

$$C=\lambda\,[PQ\,(Q-P)+QR\,(R-Q)+RP\,(P-R)]\,,$$

ami átrendezéssel így írható:

$$C=-\lambda\,(Q-P)\,(R-Q)\,(P-R)\,.$$

Innen látható, hogy $A=B=0$ mellett és a korábbi feltevésekkel $C\neq 0$, tehát ilyenkor nincs olyan x, amelyre egyenletünk teljesülne.

Megjegyzés. Ha $k+l+m\neq 0$ és P, Q, R különböző számok, akkor, mint (1)-ből látható, $-P$, $-Q$, $-R$ egyike sem gyök, mert pl. $y=-P$-vel az (1) alak bal oldala: $k(-P+Q)(-P+R)\neq 0$. Ha viszont pl. $P=Q\neq R$, akkor $y=-P$ egyik gyöke (1)-nek, a másik pedig

$$y=-\frac{(k+l)\,R+mP}{k+l+m}.$$

Végül $P=Q=R$ mellett (1) így alakul:

$$(k+l+m)\,(y+P)^2=0,$$

vagyis $y=-P$ kétszeres gyök, más gyök nincs.