

Bizonyítsuk az állítást a teljes indukció módszerével. $n = 0$ -ra igaz az állítás, mert $\cos \alpha = \sin 2\alpha / 2 \sin \alpha$ (hacsak nem $\alpha = j\pi$, ahol j egész szám). Feltéve, hogy az állítás érvényes $n = k$ -ra, azaz

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 2^2\alpha \dots \cos 2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1} \sin \alpha},$$

szorozzuk meg ezen egyenlőség mindkét oldalát $\cos 2^{k+1}\alpha$ -val és alkalmazzuk a $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$ átalakítást a jobb oldalra $x = 2^{k+1}\alpha$ -val:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 2^2\alpha \dots \cos 2^k\alpha \cos 2^{k+1}\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha \cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1} \sin \alpha} = \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2} \sin \alpha},$$

ami azt jelenti, hogy az állítás érvényessége $n = k$ -ról $n = k + 1$ -re öröklődött, az azonosság minden nemnegatív egész n -re érvényes minden olyan α mellett, amelyre a jobb oldalnak van értelme (ti. $\alpha = j\pi$ kivételével minden szögre).

Gárdonyi Eszter (Bp. V., Veres Pálné lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Nem lényegesen különböző megoldás a fentitől az, ha úgy mutatjuk meg $n + 1$ lépésben a bal oldali kifejezés és a jobb oldali nevező szorzatának a jobb oldal számlálójával való egyenlőségét, hogy minden lépésben felismerjük a tényezők között ugyanazon szög szinuszát és koszinuszát, és ezek 2-szeres szorzata helyett a 2-szer akkora szög szinuszát írjuk.

Papp Éva (Bp. VIII., Ságvári E. gyak. lg. IV. o. t.)

2. Már jobban különbözött a fentiektől azoknak a gondolatmenete, akik a $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ azonosságnak $x = \alpha, 2\alpha, 2^2\alpha, \dots, 2^n\alpha$ -ra való felírása után mindezeket összeszorozták és a kapott egyenlőséget a mindkét oldalon fellépő, $\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 2^2\alpha \dots, \sin 2^n\alpha$ szorzattal osztották. Így azonban mindazokra az *alpha* értékekre további külön vizsgálat válik szükségessé, amelyekre $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ -nel $2^i\alpha = j\pi$, ahol j egész szám, mert ezekkel az említett szorzat 0, vele nem oszthatunk. Eszerint ez az elgondolás csak kezdete, könnyebb része egy bizonyításnak.