I. megoldás: $5x = y$ helyettesítéssel és a $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y = 1 - 2\sin^2 y$, $\operatorname{ctg} y = 1/\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} y = \sin y/\cos y$ és $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ azonosságok felhasználásával egyenletünk átalakítható:

$$1 - 2\sin^2 y + \operatorname{tg}^2 y = 2,$$
$$1 - 2\sin^2 y + \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} = 2.$$

Írjunk $\sin^2 y$ helyébe z-t, és zárjuk ki előre az esetleges $z = 1$ megoldást.

$$1 - 2z + \frac{z}{1-z} = 2,\ z^2 = \frac{1}{2},\ z^2 = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(a negatív gyök nem felel meg, mert $z = \sin^2 y \geq 0$). Most már

$$\sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{8}}{2} = \pm 0{,}8409;$$

innen századfoknyi pontossággal

$$y_1 = 57{,}23^\circ + k\cdot 360^\circ, \qquad y_3 = 237{,}23^\circ + k\cdot 360^\circ,$$
$$y_2 = 122{,}77^\circ + k\cdot 360^\circ, \qquad y_4 = 302{,}77^\circ + k\cdot 360^\circ, (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

végül

$$x = y/5 \text{ alapján}$$
$$x_1 = 11{,}45^\circ + k\cdot 72^\circ, \quad x_3 = 47{,}45^\circ + k\cdot 72^\circ,$$

(I)

$$x_2 = 24{,}55^\circ + k\cdot 72^\circ, \quad x_4 = 60{,}55^\circ + k\cdot 72^\circ.$$

Eszerint egyenletünknek a 0°, 72°, 144°, 216°, 288° és 360° határokkal meghatározott 72°-nyi szögintervallumok mindegyikében 4 megoldása van, 0° és 360° között 20 megoldása.

Katona Éva (Bp. XIV., Ybl M. építőipari t. I. o. t.)

II. megoldás: Közvetlenül $\cos 10x$-re kapunk egyenletet, ha a második tagnak az I. megoldásban is használt összefüggések alapján való

$$\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{ctg} 5x} = \operatorname{tg}^2 5x = \frac{\sin^2 5x}{\cos^2 5x}$$

átalakítására folytatólag a félszögekre vonatkozó $\sin^2 a/2 = (1 - \cos\alpha)/2$ és $\cos^2\alpha/2 = (1 + \cos\alpha)/2$ azonosságokat alkalmazzuk $\alpha = 10x$-szel:

$$\cos 10x + \frac{1 - \cos 10x}{1 + \cos 10x} = 2.$$

Innen $\cos 10x \neq -1$ feltevéssel

$$\cos^2 10x - 2\cos 10x - 1 = 0,\ \cos 10x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Csak a $\cos 10x = 1 - \sqrt{2} = -0{,}4142$ gyök felel meg, mert a másik nagyobb 1-nél. A táblázat szerint

$$10x_1 = 114{,}47^\circ + k\cdot 360,\ 10x_2 = 245{,}53^\circ + k\cdot 360^\circ,\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

és így, ismét századfoknyi pontossággal:

(II) $$x_1 = 11{,}45^\circ + k\cdot 36^\circ, \quad x_2 = 24{,}55^\circ + k\cdot 36^\circ.$$

Így minden egész k-ra $k\cdot 36^\circ$ és $(k+1)\cdot 36^\circ$ között (és minden más 36°-nyi szögintervallumban) két gyöke van egyenletünknek, 0° és 360° között pedig 10-szer ennyi, vagyis 20 gyöke.

Losonczy László (Miskolc, Gábor Á. kohóipari t. IV.o. t.)

III. megoldás: Arra emlékezve, hogy egy szögnek minden trigonometriai függvényét négyzetgyökjeltől mentesen lehet kifejezni a feleakkora szög tangensével, egyenletünket olyanná alakíthatjuk át, amelyben csak $\operatorname{tg} 5x$ szerepel. Ugyanis $\cos 10x = (1\operatorname{tg}^2 5x)/(1 + \operatorname{tg}^2 5x)$ és így a biztosan el nem tűnő $1 + \operatorname{tg}^2 5x$-szel való szorzás és rendezés után

$$\operatorname{tg}^4 5x - 2\operatorname{tg}^2 5x - 1 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 5x = 1 \pm \sqrt{2}$$

(feltéve természetesen, hogy tg $5x$ létezik, vagyis $5x \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$). A pozitív gyökből

$$\operatorname{tg} 5x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} = \pm 1{,}5538,$$

$$5x = \pm 57{,}23^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\text{(III)} \qquad x = \pm 11{,}45^\circ + k \cdot 36^\circ.$$

$x_1 = +11{,}45^\circ$-ból a $k = 0$, 1, 2, …, 9, $x_2 = -11{,}45^\circ$-ból a $k = 1$, 2, 3, …, 10 értékekkel kapunk 0° és 360° közti szögeket, az ilyen gyökök száma 20.

Bartha László (Balassagyarmat, Balassi B. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A (II) gyökök páros k-val az (I) gyökök közül x_1 és x_3-at adják meg, páratlan k-val pedig az x_2 és x_4 gyököket. A (III) megoldás $x_2 = -11{,}45^\circ + 36^\circ$ gyöke szerepel (I)-nek x_2-jében $k = 0$-val.