I. megoldás: Az adott $P(a,b,c)$ kifejezést kifejtve a $\pm 3x^2yz$ típusú hat tag kiesik – itt x, y, z valamely sorrendben a, b, c-t jelöli –, (ellenőrizzék ezt olvasóink a „fejbeli" számolás gyakorlására a tagok leírása nélkül; a *Szerk.*), a megmaradó hat tagot pedig c hatványai szerint rendezve, majd az egyenlő kitevőjű hatvány–különbségeket szorzattá alakítva kiemelhetjük az $(a-b)$ tényezőt:

$$P(a,b,C)=(b-a)c^3+(a^3-b^3)c+ab(b^2-a^2)=$$
$$=(a-b)\big[-c^3+(a^2+ab+b^2)c-ab(a+b)\big].$$

Most a nagy zárójel tagjait a hatványai szerint átrendezve kiemelhetjük $(b-c)$-t:

$$P(a,b,c)=(a-b)\big[(c-b)a^2+b(c-b)a+c(b^2-c^2)\big]=$$
$$=(a-b)(b-c)\big[-a^2+ab+c(b+c)\big].$$

Végül a nagy zárójelben b szerint rendezve kiemelhetjük $(c-a)$-t:

$$P(a,b,c)=(a-b)(b-c)\big[(c-a)b+(c^2-a^2)\big]=$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

és evvel a kifejezést a, b és c négy elsőfokú polinomjának szorzataként írtuk fel, további felbontás már nem lehetséges.

Várhelyi Judit (Bp. I., Építőanyagipari technikum IV.o. t)

II. megoldás: A $P(x,b,c)$ kifejezésnek, mint x polinomjának az $x=b$ és $x=c$ helyek 0-helyei:

$$P(b,b,c)=b(b-c)^3+b(c-b)^3=0,$$
$$c(c,b,c)=c(b-c)^3+c(c-b)^3=0,$$

eszerint x helyett újra a-t írva a kifejezésből $a-b$ és $a-c$ kiemelhető.

Hasonló meggondolással adódik, hogy a kifejezésből $b-a$ és $b-c$, ill. $c-a$ és $c-b$ is kiemelhető. A kapott hat tényezőből azonban kettő–kettő csak előjelben tér el, tehát három lényegesen különböző tényezőt kaptunk.

Másrészt látjuk, hogy a, b, c helyére b, c, a-t, majd c, a, b-t írva a kifejezés nem változik meg. Hogy ez a tulajdonság a fenti tényezők kiemelése után is látható maradjon, vegyük első tényezőnek $a-b$-t, a további kettőnek pedig a belőle a fenti helyettesítésekkel adódó; $b-c$ és $c-a$ különbségeket. A kiemelt $Q(a,\,b,\,c)=(a-b)(b-c)(c-a)$ szorzat éppenúgy homogén kifejezése a, b, c-nek, mint $P(a,\,b,\,e)$, fokszámuk 3, ill. 4, ennélfogva $P(a,\,b,\,c)$-nek $Q(a,\,b,\,c)$-vel való osztása hányadosként egy ugyancsak homogén $R(a,\,b,\,c)$ kifejezésre vezet, amelynek fokszáma $4-3=1$. Legyen ebben a, b, c együtthatója rendre A, B, C, azaz $R(a,\,b,\,c)=Aa+Bb+Cc$. A fenti helyettesítéseknek ezt is önmagába kell átvinniük. Abból a követelésből, hogy

$$Aa+Bb+Cc=Ab+Bc+Ca=Ac+Ba+Cb$$

azonosság legyen, azaz bármely, a, b, c értékrendszerre fennálljon, következik (pl. $a=1$, $b=c=0$ helyettesítéssel), hogy $A=B=C$, így $R(a,\,b,\,c)=A(a+b+c)$ és

$$P(a,b,c)=A(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Végül pl. a^3 bal és jobb oldali együtthatójának megegyezéséből $-b+c=-A(b-c)$, azaz $A=1$ és

$$P(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Flanek László (Bp. I., Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. $P(x,\,b,\,c)$ mint x-nek polinomja harmadfokú. Harmadik 0-helyét megkeresve is kapunk egy kiemelhető tényezőt (sőt ez a következetes folytatása az első két tényező megállapításának). Az I. megoldás szerint $P(x,\,b,\,c)$ kifejtett alakjában x^2 együtthatója 0, eszerint a $P(x,\,b,\,c)=0$ egyenlet gyökeinek összege 0, így $x_1=b$ és $x_2=c$-ből $x_3=-b-c$, a harmadik gyöktényező: $a-x_3=a+b+c$. A gyöktényezős alak céljára x^3 együtthatója az I. megoldás első rendezéséhez hasonlóan $c-b$, így $P(a,\,b,\,c)=(c-b)(a-b)(a-c)(a+b+c)$, és ebből a fenti szimmetrikus alak $(-1)^2$-nel való szorzás útján adódik.

III. megoldás: Az átalakítások megkönnyítésére igyekezzünk a különbségek helyett, amelyeknek köbe szerepel, egy–egy betűt vezetni be. Mivel $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, így kettővel a harmadik már kifejezhető. Legyen tehát $b-c=m$, $c-a=n$, ekkor $a-b=-m-n$, és az első két egyenlőségből b-t és a-t kifejezve az adott kifejezést c, m és n polinomjává alakíthatjuk: $a=c-n$, $b=c+m$, és az adott kifejezés:

$$(c-n)m^3+(c+m)n^3-c(m+n)^3=\big[m^3+n^3-(m+n)^3\big]c+mn(n^2-m^2)=$$
$$=-3mn(m+n)c+mn(m+n)(n-m)=mn(m+n)(-3c+n-m),$$

végül az eredeti változókra visszatérve:

$$-(b-c)(c-a)(a-b)(-3c+c-a-b+c)=$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$