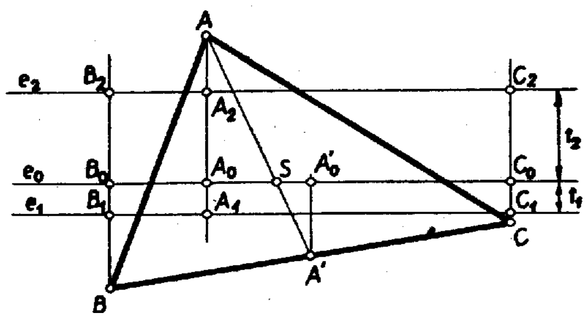
I. megoldás: Előkészítésül megmutatjuk, hogy az ABC háromszög S súlypontján átmenő egyeneseknek a háromszögtől mért középtávolsága 0. Ha egy ilyen e éppen súlyvonal, pl. AA' – ahol A' a BC oldal felezőpontja –, akkor A távolsága e-től 0, az e-nek két partjára eső B és C-nek BB_1, ill. CC_1 távolságai pedig az $A'BB_1$ és $A'CC_1$ derékszögű háromszögek egybevágósága folytán (átfogó és két szög) egyenlők, és így a középtávolságot adó különbség valóban 0. Minden más esetben az S-en áthaladó e_0 egyenes egy csúcsot elválaszt a másik kettőtől, legyen ez A. A másik parton fekvő B és C távolságainak, mint a BB_0C_0C trapéz (a 0 index az e_0-on levő vetületet jelöli) párhuzamos oldalainak összege egyenlő a középvonalnak, A' e_0-tól mért $A'A'_0$ távolságának kétszeresével; ugyanennyi A-nak e_0-tól való AA_0 távolsága is, mert az $SA'A'_0$ és SAA_0 háromszögek hasonlók (két szög), és így a súlypont harmadoló tulajdonságánál fogva $AA_0 : A'A'_0 = SA : SA' = 2 : 1$, vagyis $AA_0 = 2A'A'_0$. Ezek szerint a képezendő különbség ismét 0.



Most megmutatjuk, hogy ha az e egyenes párhuzamos e_0-val és távolságuk t, akkor e-nek a háromszögtől mért középtávolsága $3t$. e az e_0-ból a mindkettőjükre merőleges egyenes mentén t-vel való eltolással is előállítható. Eközben e-nek az egyes csúcsoktól mért távolsága vagy növekszik – ti. ha e az e_0-nak a csúccsal ellentétes partján van –, vagy csökken, ha a csúccsal megegyező partján, és 0-ra csökken, ha e átmegy a csúcson. (Egyelőre olyan legyen e, amely ugyanúgy választja szét A, B, C-t mint e_0, azaz eltolással nem lép át csúcsot.) Pl. az ábrán e_1 azon a partján van e_0-nak, mint B és C, így e_1 az A-tól messzebb, B és C-hez közelebb van, mint e_0, e_2 viszont A-hoz közelebb, B és C-től távolabb van mint e_0; így középtávolságuk:

$$AA_1 - (BB_1 + CC_1) = 3t_1, \quad \text{ill.} \quad (BB_2 + CC_2) - AA_2 = 3t_2,$$

mert egy tag nőtt és két tag csökkent t_l-gyel, ill. két tag nőtt és egy tag csökkent t_2-vel (az e_0-ra fentebb kapott 0 középértékhez képest).

A középtávolság megállapításában az abszolút értéket a példákban úgy kaptuk meg, hogy a különbségben a megnövekedett távolságot (ill. távolságok összegét) vettük kisebbítendőnek. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a három csúcs távolságát *előjelesen összeadtuk*, és ebben azon csúcsoknak e-től mért távolságát vettük negatívnak, amelyek e_0-nak ugyanazon partján vannak, mint e, az ellentett parton levőket pedig pozitívnak. Továbbfejlesztve: azt, hogy a negatívnak vett távolságok abszolút értéke t-vel csökkent, és a pozitívnak vetteké t-vel növekedett, úgy mondhatjuk, hogy minden (előjeles) távolságot t-vel növeltünk, így növekedett a háromtagú összeg $3t$-vel. Ezek a megállapításaink már olyan e-kre is érvényesek, amelyekbe az e_0 eltolásával egy, vagy két csúcs átlépése után jutunk el, és így a középtávolságnak az eredeti előírás szerinti képezésében a levonandók hozzáadandóvá válnak, megfelelően annak, hogy t hozzáadásával az eredetileg negatív távolság pozitívvá lett.

Ha már most a súlyponttól t távolságra eltolt egyenes középtávolsága $3t$, akkor a d középtávolságú egyenesek azok és csak azok, amelyek a súlyponttól $d/3$ távolságra vannak, azaz amelyek érintik a súlypont körül $d/3$ sugárral írt kört.

Simon László (Bp. XI., József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyenek az adott háromszög csúcsai valamely derékszögű koordinátarendszerben $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, és legyen az $y = mx + b$ egyenesnek e háromszögtől mért középtávolsága d. Ekkor felhasználva a pontnak egyenestől mért távolságára a koordinátageometriából ismert képletet:

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = \left| \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{y_2 - mx_2 - b}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{y_3 - mx_3 - b}{\sqrt{m^2+1}} \right|.$$

Itt nem volt szükség d-nek d_1, d_2, d_3-ból összeadással, összeadás és kivonással való képezésére, esetek széjjelválasztására, ugyanis a képlet már előjellel adja a távolságot aszerint, hogy a pont az egyenesnek egyik vagy másik partján van.

Átrendezéssel

$$\left| \frac{\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} - m\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} - b}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \frac{d}{3},$$

továbbá, felismerve a bal oldali számlálóban háromszögünk S súlypontjának y_s, x_s koordinátáit:

$$\left| \frac{y_s - mx_s - b}{\sqrt{m^2+1}} \right| = \frac{d}{3},$$

ez pedig azt jelenti, hogy az $y = mx + b$ egyenes S-től $d/3$ távolságban van, érinti az S körül $d/3$ sugárral írt kört. Az átalakításokat visszafelé olvasva belátható, hogy minden az S körül $d/3$ sugárral írt kört érintő egyenesnek a háromszögtől való középtávolsága d.

Biborka Tamás (Makó, József A. g. I. o. t.)