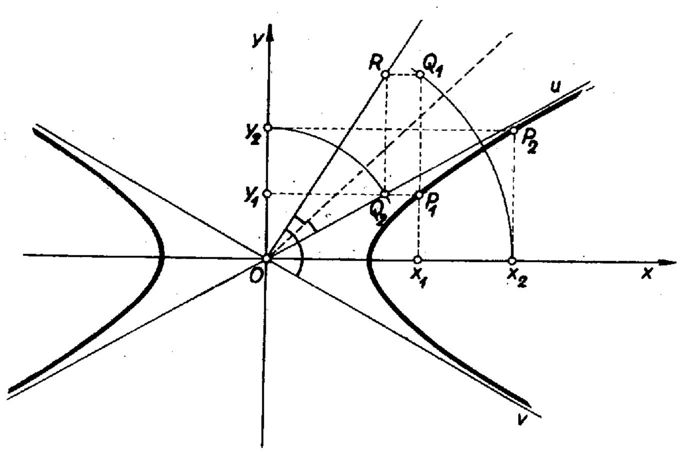
I. megoldás: Legyenek az adott elemek rendre O, x, P_1, és P_2, továbbá az O-ban x-re merőlegesen álló képzetes tengely y, végül a keresett aszimptoták u és v.

Feltehetjük, hogy P_1 és P_2 az x és y által létrehozott síknegyedek közül ugyanegyben van pl. x és y-t a koordinátatengelyek szokásos irányításába állítva a jobb felső I. negyedben, esetleg egyikük az x-en, vagyis a hiperbola egyik ágának ugyanazon a felén; ugyanis a II., III., vagy IV. negyedben adott pontok esetén y-ra, O-ra, ill. x-re való tükrözéssel a mondott helyzet előállítható. Feltesszük továbbá, hogy P_1 és P_2 az esetleges ilyen tükrözések után is különböző pontjai a hiperbolának, – azaz $OP_1 \neq OP_2$ és az indexek alkalmas megválasztásával $OP_1 < OP_2$ –, természetesen O-tól is különböznek, és a P_1P_2 egyenes x, y egyikével sem párhuzamos, és nem megy át O-n. A kizárt esetekben ugyanis vagy nincs meghatározva a hiperbola, vagy nem létezik a követelményeket kielégítő hiperbola.

O ismeretében elegendő az aszimptotáknak egy-egy O-tól különböző pontját megszerkeszteni; keressük azt az U, ill. V pontjukat, ahol a P_1P_2 egyenest metszik (1. ábra).



1. ábra

Ezek a P_1, P_2 pontpárra tett feltevés folytán egyrészt léteznek – ugyanis P_1P_2 nem lehet u és v egyikével sem párhuzamos, mert aszimptotával párhuzamos egyenesen a hiperbolának nem lehet két pontja, – másrészt O-tól és így egymástól is különbözők, O-val együtt háromszöget alkotnak, U és V egyike az I., másika a IV. negyedben van.

Ismeretes, hogy a hiperbola bármely húrjának felezőpontja egyben a húrt kimetsző egyenesnek az aszimptoták közti szakaszát is felezi; eszerint P_1P_2-nek p felezőmerőlegese egyben az OUV háromszög UV oldalát is merőlegesen felezi. Tudjuk továbbá, hogy u és v tükrös egyenespár a tengelyekre nézve, eszerint x és y adják az OUV háromszög O csúcsánál levő belső és külső szögek felezőit, mégpedig x „pozitív" oldala a belső szögfelező, mint az U, V-t tartalmazó I. és IV. síknegyed elválasztó vonala. Minthogy pedig a háromszög bármelyik csúcsából kiinduló belső és külső szögfelezőpár a szemközti oldal felező merőlegeséből a körülírt kör egy átmérőjét metszi ki, azért p-nek x, ill. y-nal való Q_1, Q_2 metszéspontjai között megkapjuk a háromszög körülírt körének egy átmérőjét, és e körnek P_1P_2-vel való metszéspontjaiban a keresett U, V-t.

Az elemzésből a szerkesztés lépései: O-n át meghúzzuk az x-re merőleges y-t, P_1P_2 felező merőlegesének az x és y közé eső Q_1Q_2 szakasza mint átmérő fölé k kört írunk, ebből P_1P_2-vel kimetsszük U, V-t, végül OU és OV megrajzolásával megkapjuk az u, v aszimptotákat. – Változat: y és Q_2 mellőzhetők: k-nak K középpontját P_1P_2 és OQ_1 felező merőlegeseinek metszéspontja is megadja, sugara pedig $r = KO = KQ_1$.

Valóban, a kapott U, V pontokra $UP_1 = VP_2$ és x felezi a VOU szöget, ezért OU és OV aszimptoták.

Mindezekből azt is látjuk, hogy ha a feladat megoldható, akkor csak egy megoldás (egy u, v pár) van. A megoldhatóság feltétele, hogy p messe x és y mindegyikét, azaz P_1P_2 se x-szel, se y-nal ne legyen párhuzamos. Ezt a P_1, P_2 párra tett feltevésünk már biztosítja, ugyanis p csak úgy lehetne párhuzamos a tengelyek valamelyikével, ha ugyanez P_1P_2-re is állna. Végül, hogy x-nek pozitív oldala *belső* szögfelezője legyen az OUV háromszögnek, hogy a két szimmetriatengely közül ez legyen a *valós* tengely, ehhez szükséges, hogy az OP_1P_2 háromszög a csúcsok ezen sorrendjében pozitív körüljárású legyen, másszóval az oldalai közti $OP_1 < OP_2$ egyenlőtlenséggel együtt az ezen oldalai és x pozitív fele közti α_1 és α_2 szögekre ugyanezen értelemben $\alpha_1 < \alpha_2$ álljon.

Galambos János (Veszprém, Lovassy L. G. IV. o. t.)

Megjegyzés. P_1 és P_2-nek az I. negyedbe való rögzítésével tulajdonképpen csak az elemzést és a diszkussziót könnyítettük meg. A szerkesztés bármely P_1, P_2 pontpárral végrehajtható, hacsak p metszi x és y mindegyikét. Az ellentétes eset pedig azt jelenti, hogy P_1 és P_2 vagy tükrösek, x és y és O egyikére, vagyis az adatok nem függetlenek egymástól, vagy pedig a feladat megoldhatatlan, az adatok ellentmondásban vannak (pl. ha x merőleges P_1P_2-re, de nem felező merőlegese a P_1P_2 szakasznak). Ha α_1, α_2-vel az OP_1, OP_2 egyeneseknek x-szel bezárt hegyes szögét jelölve $OP_1 < OP_2$ és $\alpha_1 > \alpha_2$, akkor x nem valós, hanem képzetes tengelye lesz a hiperbolának.

II. megoldás: Legyen P_1P_2 metszéspontja x, y-nal S_1, ill. S_2, és P_1P_2 felezőpontja T. Ekkor a szögfelezők által létrehozott szakaszokra vonatkozó tétel szerint az OUV háromszögben

$$S_1U : S_1V = OU : OV = S_2U : S_2V.$$

Itt az első és a harmadik arány tagjait olyan szakaszok összegével, ill. különbségével helyettesíthetjük, amelyeknek egyik végpontja T:

$$(TU + TS_1) : (TV - TS_1) = (TS_2 + TU) : (TS_2 - TV).$$

Innen egyrészt $TV = TU$ figyelembevételével, másrészt mindkét arány helyett a tagjai összegéből és különbségéből képezett arányra áttérve

$$2TU : 2TS_1 = 2TS_2 : 2TU,$$

amiből

$$TU^2 = TS_1 \cdot TS_2,$$

vagyis U és V-nek a megszerkeszthető T-től az ismert P_1P_2 egyenesen mért távolsága mértani középarányos a megszerkeszthető TS_1 és TS_2 szakaszok között.

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. III. o. t.)

III. megoldás: Legyen az adott O és x origója, ill. X tengelye egy derékszögű koordinátarendszernek és legyenek az adott pontok koordinátái ebben a rendszerben $P_1(x_1,\, y_1)$, ill. $P_2(x_2,\, y_2)$. Ekkor hiperbolánk egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakú. Itt az ismeretlen a és b meghatározhatók volnának abból a két egyenletből álló

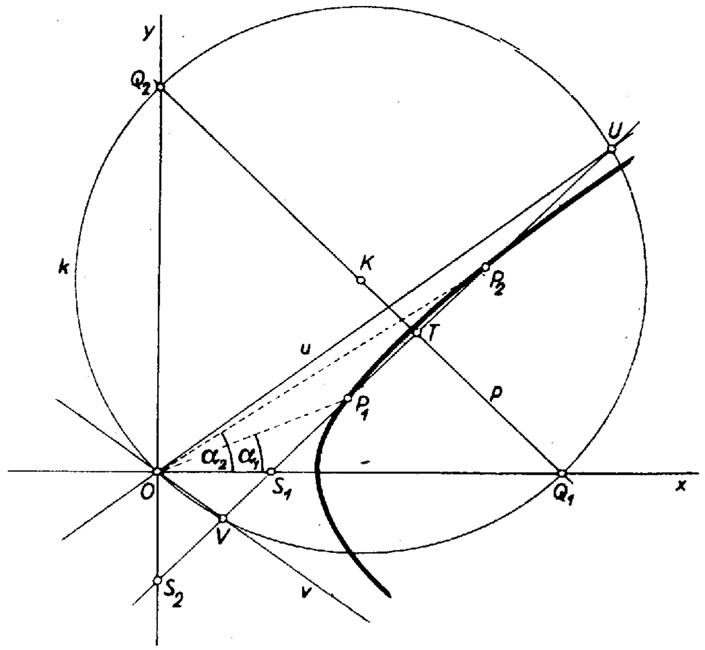
$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

egyenletrendszerből, amely azt fejezi ki, hogy P_1 és P_2 rajta vannak a hiperbolán, most azonban az aszimptoták $\pm b/a$ iránytangense céljára csak arányukra van szükség. (1) és (2) kivonásával és alkalmas rendezéssel

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{y_2^2 - y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 - x_1^2}} \tag{3}$$

és ez, ill. az aszimptoták derékszögű háromszögek révén megszerkeszthetők pl. a következő lépésekben: az O körül x_2, ill. y_2 sugárral rajzolt, I. negyedbeli negyedköríveket metsszük, éspedig az előbbit a P_1-en át az X-tengelyre, az utóbbit az Y-tengelyre állított merőlegessel, majd a kapott Q_1-en át az Y-ra, Q_2-n át az X-re állított merőlegesnek R metszéspontját összekötjük O-val. Ekkor OR-nek α irányszögére $\operatorname{tg}\alpha = a/b$, ennélfogva u-t OR-nek az I. negyed szögfelezőjére való tükrözésével, v-t pedig O-ban az OR-re állított merőlegesként kaphatjuk (2. ábra).



2. ábra

(3)-ban feltettük, hogy $x_2 > x_1 (> 0)$, így a nevezőbeli gyök alatt pozitív szám áll. Ehhez (1) és (2)-t, valamint az $y_1 \geq 0$, $y_2 > 0$ feltevéseket hozzávéve már következik, hogy $y_2 > y_1$, vagyis (3) számlálója is valós, ugyanis

$$\frac{y_2^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - 1 > \frac{x_1^2}{a^2} - 1 = \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Az adott két pont, valamint x, y és O-ra vonatkozó tükörképeik közül választott 5 pont felhasználásával a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozó Pascal-tétel alapján megszerkeszthetjük e pontok bármelyikében a hiperbola érintőjét.[1] Láttuk továbbá a 847. feladat II. megoldásában,[2] hogy egy P hiperbolapont és a benne húzható e érintő, valamint az x, y tengelyek ismeretében hogyan szerkeszthetők meg az F_1, F_2 fókuszok: annak a körnek az x valós tengely egyenesével való metszéspontjaiként, amelynek középpontja az y képzetes tengelyen van, és amely átmegy P-n, valamint e és y-nak C metszéspontján. Végül a 847. feladat III. megoldásában[3] látott tétel megfordításával F_1, F_2, P és e ismeretében megszerkeszthetjük e-nek az aszimptotákkal való metszéspontjait: az az F_1, F_2-n átmenő kör metszi ki ezeket, amelynek középpontját a P-ben e-re emelt merőleges metszi ki y-ból.

Pődör Bálint (Bp. II., Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A fókuszok ismeretében a szerkesztést annak alapján is folytathatjuk, hogy F_1, F_2-nek e-n való F_1', F_2' merőleges vetületei rajta vannak az O középű, a sugarú főkörön; így az $OF_1 = c$ átfogóból és az $OF_1' = a$ befogóból szerkesztett derékszögű háromszög másik befogójában megkapjuk b-t, végül b/a-ban az aszimptoták iránytangensét.

[1] Lásd pl. *Schopp János:* Kúpszeletek (Középisk. Szakköri Füzet), Tankönyvkiadó, 1955. 73–74. o., 68. és 70. §.

[2] KML. XVI. kötet 89. o. (1958 március).

[3] K. M. L. XVI. kötet 89. o. (1958 március).