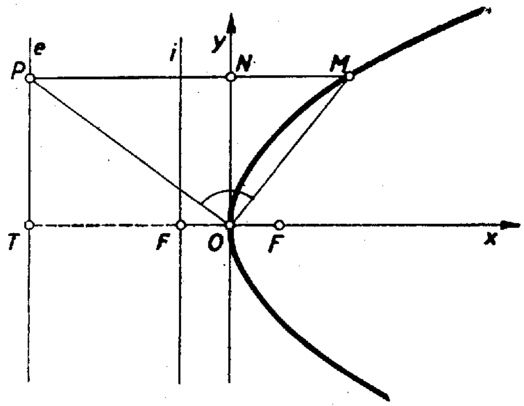
I. megoldás: Tekintsük adottnak a parabolát i irányvonalával és F fókuszával, legyen továbbá F vetülete i-n F'; ekkor a parabola O csúcsa az FF' szakasz felezőpontja, t tengelye pedig az FF' egyenes.



(A TO szakasz F-je helyesen F^1.)

Vizsgáljuk a feladatban leírt egyenesek P metszéspontjának mértani helyét abban a derékszögű koordinátarendszerben, amelynek origója O, X-tengelye az OF egyenes, hosszúságegysége az OF szakasz, F koordinátái (1, 0), így a parabola paramétere $p = 2$ egység, és egyenlete $y^2 = 4x$.

Válasszuk segédváltozónak az OM egyenes m iránytangensét. Ekkor M koordinátái, mint a parabola és az $y = mx$ egyenes O-tól különböző metszéspontjáé: $M(4/m^2,\ 4/m)$. Minden (valós) $m \neq 0$ értékhez egy és csak egy M pont tartozik; és megfordítva minden az O-tól különböző M ponthoz egy és csak egy m érték, az OM egyenes iránytényezője. $m = 0$ esetén $y = mx$-nek a parabolával csak egy közös pontja van: O, ez azonban nem választható M-nek, mert így az OM egyenes nincs egyértelműen meghatározva.

Az OM egyenesre O-ban emelt merőleges egyenlete: $y = -x/m$, az M-en át a parabola tengelyével húzott párhuzamosé: $y = 4/m$, és ezekből P koordinátái $(-4,\ 4/m)$, vagyis P abszcisszája m-től független, állandó, valamennyi P pont rajta van az $x = -4$ egyenlettel jellemzett, az i-vel párhuzamos e egyenesen. A mértani hely e azon pontjainak összessége, amelyeknek $y = 4/m$ ordinátája valamely megengedett m-mel kiadódik.

Minthogy pedig az $m = 0$ érték kivételével minden m-re értelmezett $y = 4/m$ függvény értékkészletébe a 0 kivételével minden szám beletartozik, azért a keresett mértani hely a 0 ordinátájú $(-4,\ 0)$ pontot, F-nek e-n levő vetületét kivéve e-nek valamennyi pontját tartalmazza.

Visszatérve a feladat tiszta geometriai (koordinátamentes) fogalmazására, a keresett mértani helyet úgy kapjuk, hogy vesszük azt az i-vel párhuzamos egyenest, amelynek i-től, ill. F-től való távolsága 3/2-szerese, ill. 5/2-szerese a parabola paraméterének, és belőle kihagyjuk a parabola tengelyével való T metszéspontot.

Fanta Katalin (Szombathely, Kanizsai Dorottya lg. IV. o. t.)

II. megoldás: Hogy a keresett mértani helynek minden pontja ugyanakkora távolságban van az irányvonaltól, ill. az ezzel párhuzamos csúcsérintőtől, éspedig ennek a parabolával ellentétes oldalán, ezt a koordinátageometria és a „tiszta" geometria módszereinek egymás melletti alkalmazásával a következőképpen is beláthatjuk. Legyen (a fenti jelölések kiegészítéséül) az M-en át a tengellyel párhuzamos egyenesnek a parabola csúcsérintőjével (az Y tengellyel) való metszéspontja N. Az OMP derékszögű háromszögben $ON^2 = PN \cdot NM$. Itt NM és ON az M pont koordinátái a fent használt rendszerben, azaz $y^2 = PN \cdot x$. Ezt a parabola egyenletével egybevetve $PN = 4$, állandó, vagyis a mértani hely minden pontja 4 egységnyi távolságban van a csúcsérintőtől – éspedig a csúcsérintőnek a parabolával ellentétes oldalán, mert az ON magasság az átfogó P és M végpontjait szétválasztja, – vagyis a fent látott $e \parallel i$ egyenesen. Az e-nek T pontja nem tartozik hozzá a mértani helyhez, mert T-n át a tengellyel húzott párhuzamos a parabolát O-ban metszi, és így OM iránya határozatlan, P megszerkesztését nem végezhetjük el. Viszont e-nek minden a T-től különböző P^* pontja hozzátartozik a mértani helyhez; ugyanis a P^*-on át a t-vel párhuzamosan húzott egyenes egy az O-tól különböző M-ben metszi a parabolát és ehhez az M-hez P^* tartozik.

Surguta László (Gyöngyös, Vak Bottyán g. III. o. t.)

Megjegyzés. Sok dolgozat a parabola egyenletét $y^2 = 2px$ alakban használta. Így is ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Az I. megoldásban azt láttuk, hogy ha egy geometriai kérdés felvetése után helyezünk koordinátarendszert az alakzatra, akkor nemcsak a tengelyek helyzetét, hanem a hosszegységet is szabadon választhatjuk. Természetesen célszerű az alakzatban előforduló szakaszok valamelyikét választani.