I. megoldás: Minthogy a kívánt hatványkitevő: $16=2^4$, azért kézenfekvő a 16-ik hatványokhoz négy egymásutáni négyzetre emeléssel eljutni. Nem szükséges az x_1, x_2, x_3 gyököket kiszámítani, mert összegüket, páronkénti szorzataik összegét és szorzatukat (szokásos nevükön elemi szimmetrikus függvényeiket) megadják az egyenlet együtthatói, és ezek a számításhoz elegendők. A számítás menetét előzetesen általában az

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

egyenlettel kapcsolatban mutatjuk be, amelynek y_1, y_2, y_3 gyökeire a polinom alakkal azonos $(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=0$ gyöktényezős alak kifejtésével való összehasonlítás révén

$$y_1+y_2+y_3=-a,$$

(1) $$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=b,$$

(2) $$y_1y_2y_3=-c.$$

Az $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ összeg tagjai szerepelnek $y_1+y_2+y_3$ négyzetében, de mellettük áll még a páronkénti szorzatok összegének kétszerese, ennélfogva

(3) $$y_1^2+y_2^2+y_3^2=(y_1+y_2+y_3)^2-2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3).$$

Ennek alapján y_1, y_2, y_3 helyett mindkét oldalon y_1^2, y_2^2, y_3^2-et írva

$$y_1^4+y_2^4+y_3^4=(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2-2(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2)$$

adódik, amiből látjuk, hogy szükségünk lesz a gyökök négyzeteiből képezhető páronkénti szorzatok összegére is. Ezt (1) bal oldalának négyzetéből képezhetjük a mellette fellépő tagok levonásával; éspedig

(4) $$\begin{aligned} y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2&=(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)^2-2y_1^2y_2y_3-2y_1y_2^2y_3-2y_1y_2y_3^2=\\ &=(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)^2-2y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3), \end{aligned}$$

amiben már (2) bal oldalát is használjuk, vagyis mindhárom elemi szimmetrikus függvényt.

A nyolcadik hatványok összegének hasonló számításához y_1^2, y_2^2, y_3^2-nak mindhárom elemi szimmetrikus függvényére van szükség, a 16-ik hatványok összegének számításához pedig y_1^4, y_2^4, y_3^4-nak mindhárom elemi szimmetrikus függvényére.

Mindezek alapján adott egyenletünkre

$$x_1+x_2+x_3=0, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3, \quad x_1x_2x_3=-1;$$

ezekből (3) és (4) alkalmazásával, valamint négyzetreemeléssel

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2(-3)=6, \quad x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=(-3)^2=9, \quad x_1^2x_2^2x_3^2=1;$$

e három számból ugyanígy

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=6^2-2\cdot 9=18, \quad x_1^4x_2^4+x_1^4x_3^4+x_2^4x_3^4=9^2-2\cdot 6=69, \quad x_1^4x_2^4x_3^4=1;$$

hasonlóan (3) és (4) alkalmazásával

$$x_1^8+x_2^8+x_3^8=18^2-2\cdot 69=186, \quad x_1^8x_2^8+x_1^8x_3^8+x_2^8x_3^8=69-2\cdot 18\cdot 1=4725;$$

(a szorzatra már nem lesz szükség);
végül e két számból már csak (3) alkalmazásával

$$x_1^{16}+x_2^{16}+x_3^{16}=186^2-2\cdot 4725=25\,146.$$

Tusnády Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. III. o. t.)

II. megoldás: Felhasználva, hogy a gyökök kielégítik az egyenletet, a gyökök magasabb hatványait helyettesíthetjük alacsonyabb hatványaik polinomjaival. A gyököket x_1, x_2, x_3-mal jelölve $x_1^3-3x_1+1=0$, vagyis $x_1^3=3x_1-1$. Ezt x_1-gyel szorozva, majd négyzetreemelve

$$x_1^4=3x_1^2-x_1,$$
$$x_1^8=9x_1^4-6x_1^3+x_1^2=9(3x_1^2-x_1)-6(3x_1-1)+x_1^2=28x_1^2-27x_1+6,$$

újabb négyzetreemeléssel

$$\begin{aligned} x_1^{16}&=(28x_1^2-27x_1+6)^2=784x_1^4-1512x_1^3+1065x_1^2-324x_1+36=\\ &=784(3x_1^2-x_1)-1512(3x_1-1)+1065x_1^2-324x_1+36=\\ &=3417x_1^2-5644x_1+1548. \end{aligned}$$

Az 1-es index helyére 2-t, majd 3-at írva; végül összegezve (ugyanis ugyanezek x_2 és x_3-ra is érvényesek)

$$x_1^{16}+x_2^{16}+x_3^{16}=3417(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-5644(x_1+x_2+x_3)+4644,$$

és itt a zárójeles összegeket az I. megoldás módján számítva a keresett összeg értéke

$$3417\cdot 6+4644=25\,146.$$

Ágh Attila (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás eljárása – jelentősen általánosabbá és gépiessé téve – egyik lényeges szakaszát teszi az ún. *Gräffe–Lobacsevszkij-féle eljárásnak*, amely bárhányadfokú algebrai egyenletek közelítő megoldására használatos.

2. Hogy számításunknak biztosan legyen értelme a középiskolai fokon ismert *valós számok körében*, ahhoz meg kellett volna győződnünk, hogy mindhárom gyök valós. Ezt az $f(x)=x^3-3x+1$ függvény ábrázolására, pontosabban grafikonjának folytonosságára gondolva (hogy ti. grafikonjának bármely két pontja közti íve úgy rajzolható meg, hogy az íróeszközt nem emeljük fel a papírról) avval valószínűsítjük, hogy $f(-2)=-1$, azaz negatív, $f(-1)=+3$ (pozitív), $f(0)=+1>0$, $f(1)=-1<0$ és $f(2)=3>0$, ennélfogva a grafikon -2 és -1, továbbá 0 és 1, majd 1 és 2 között metszi az x tengelyt, tehát e számközök mindegyikében van egy valós gyök, mindhárom gyök valós.