I. megoldás: S_n-et kombinatorikai meggondolás alapján határozzuk meg. Nevezzük az $(n+1)\cdot(n+1)$ mezős sakktáblán $n+1$ bástyának olyan elrendezését, melyben egyik sem ütheti a másikat, *szabad felállítás*nak. A különböző szabad felállítások száma nyilván $(n+1)!$, ugyanis az elsőként elhelyezendő bástya számára az első sorban $n+1$-féleképpen választhatjuk a mezőt, ez – a maga oszlopa révén – a 2-ik sorban 1 mezőt használhatatlanná tesz, tehát ott a 2-ik bástya helye n-féleképpen választható, és így az első két sor bástyái $(n+1)\cdot n$-féleképpen állíthatók fel; a 3-ik, 4-ik, ..., n-edik, $n+1$-edik bástya hasonlóan rendre $n-2$, $n-3$, ..., 2, 1-féleképpen, és így valamennyi bástya $F_{n+1}=(n+1)\cdot n(n-1)\dots 2\cdot 1=(n+1)!$-féleképpen.

Az F_{n+1} számot egy más, az összes szabad felállításokat ugyancsak kimerítő módon is megállapíthatjuk. Az első bástyát az első sor $1, 2, \dots, n$ sorszámú mezejére állítva ennek „ütősugarain" kívül marad $n\cdot n$ mező, ezeken a további n bástyát az előzők szerint minden esetben $n!$-féleképpen lehet elrendezni, tehát az ilyen szabad felállítások száma $n\cdot n!$ Ugyanez a helyzet az első bástyának az első sor $n+1$-ik (azaz sarok-)mezőre való állításakor is, ekkor a szabad mezők összefüggő $n\cdot n$ mezős sakktáblát alkotnak, tehát rajta a szabad felállítások száma F_n alakban is írható, ennélfogva $F_{n+1}=n\cdot n!+F_n$. Az F_n-et hasonlóan az első sor utolsó mezejének (az eredeti tábla 2-ik sora n-edik mezejének) külön való figyelembevételével $(n-1)(n-1)!+F_{n-1}$-nek találjuk, így $F_{n+1}=n\cdot n!++(n-1)(n-1)!+F_{n-1}$. Ezt a gondolatmenetet folytatva $F_3=2\cdot 2!+F_2$-re jutunk, itt már közvetlenül látjuk, hogy $F_2=2=1\cdot 1!+1$, ennélfogva

$$F_{n+1}=n\cdot n!+(n-1)(n-1)!+\ldots+2\cdot 2!+1\cdot 1!+1,$$

és ennek első n tagjában S_n-re ismerünk rá.

A kétféle megszámlálás révén $(n+1)!=S_n+1$, így $S_n=(n+1)!-1$.

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

II. megoldás: Egyszerű átalakítással közvetlenül adódik, hogy

$$\begin{aligned}S_n&=(2-1)1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\ldots+[(n+1)-1]\cdot n!=\\&=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\ldots+(n+1)!-n!=(n+1)!-1.\end{aligned}$$

Bagyinszky János (Nagykőrös, Arany J. g. IV. o. t.)