I. megoldás: Minden valóban másodfokú egyenlet $x^2+px+q=0$ alakra hozható. Feladatunk olyan összefüggés megállapítása p és q között, amely mellett $x_2=x_1^2$ teljesül. Mindenekelőtt feltesszük, hogy egyenletünknek vannak valós gyökei, azaz

$$p^2-4q\geq 0. \tag{1}$$

Az $x_2=x_1^2$ követelésből az ismert összefüggések alapján következik, hogy az „első" gyök és az együtthatók között egyidejűleg fennállnak az

$$x_1+x_1^2=-p \qquad \text{és} \tag{2}$$
$$x_1^3=q \tag{3}$$

egyenlőségek, innen kell x_1-et kiküszöbölnünk. Ezek szerint q-nak annyinak kell lennie, amennyi a (2)-ből számított $x_1=(-1\pm\sqrt{1-4p})/2$ gyökök valamelyikével x_1^3 értéke, ill. p-nek annyinak kell lennie, amennyi a (3)-ból számított $x_1=\sqrt[3]{q}$-val $x_1+x_1^2$ értéke. Az utóbbi módon x_1 egyértelműen meg van határozva, ugyanis (3)-nak csak egy (valós) szám tesz eleget, így a keresett *szükséges* feltétel a következő:

$$\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}+p=0. \tag{4}$$

Ez egyszersmind *elegendő* feltétel is, ugyanis a $p=-(\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2})$-tel adódó

$$x^2-\left(\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}\right)x+q=0$$

egyenlet gyökei $\sqrt[3]{q}$ és $\sqrt[3]{q^2}$, – erről észszerűen és ezért egyszerűbben a $q=\sqrt[3]{q}\cdot\sqrt[3]{q^2}$, azonosságra gondolva a bal oldalnak $(x-\sqrt[3]{q})(x-\sqrt[3]{q})$ szorzattá alakításával, vagy gépiesen, ezúttal bonyolultabban a megoldóképlet használatával győződhetünk meg –, és az utóbbi gyök valóban négyzete az előbbinek.

Simon László (Bp. XI., József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Számos megoldó köbre emelte a $-p=\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2}$ egyenlőséget és így a $-p^3=q+3\sqrt[3]{qq^2}(\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{q^2})+q^2=q-3pq+q^2$, másképpen $p^3-3pq+q^2+q=0$ feltételre jutott. Valóban, ez is szükséges feltétele, leszármaztatható velejárója követelményünk teljesülésének, ámde annak megmutatása már bonyolult, hogy ennek fennállása elegendő is $x_2=x_1^2$(vagy $x_1=x_2^2$) teljesüléséhez. Hozzájárulhatott ehhez az átalakításhoz az is, hogy sokan egyszerűbbnek tartják az olyan kifejezéseket, amelyekben nincs gyökjel. Ebben azonban nemegyszer szinte „gondolkodás nélkül" járnak el, mindennél fontosabb feladatnak véve a gyökjel, vagy a tört „eltüntetését". – A gyökökkel való foglalkozás kezdetén valóban sűrűn emlegetjük a hatványozással való ellenőrzést, a definíciót; kívánatos azonban, hogy ezt – legalább megoldóinknál – mihamarabb mellőzni lehessen. Csak úgy válnak használhatóvá az új fogalmak, amelyekről beláttuk, hogy szükségesek, ha nem igyekszünk őket minden lehető alkalommal kerülni.

2. A gyökmentes feltételre jutottak azok is, akik a követelményt a gyökképletekkel írták fel, majd a bonyolult egyenlőséget rendezték és eközben négyzetreemelést is végeztek. Ez a köbreemeléssel szemben már nem ekvivalens átalakítás, az út visszafelé nem járható!

3. Az átalakított feltételre vezet a következő megoldás is, de ebből is, mint a dolgozatok nagyobb részéből, csak a feltétel szükségessége adódik.

II. megoldás: Ha az x_1 és $x_2=x_1^2$ számok gyökei az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek, amelyben

$$a\neq 0 \quad \text{és} \quad b^2-4ac\geq 0, \tag{5}$$

akkor

$$ax_1^2+bx_1+c=0 \qquad \text{és} \tag{6}$$
$$ax_1^4+bx_1^2+c=0, \tag{7}$$

és a keresett feltételt ezekből x_1 kiküszöbölésével kell előállítanunk. (6)-nak (7)-ből való kivonásával, vagyis lényegében c-nek átmenetileg való kiküszöbölésével

$$ax_1^2(x_1^2-1)+bx_1(x_1-1)=x_1(x_1-1)(ax_1^2+ax_1+b)=0. \tag{8}$$

Ez $x_1=0$-val és $x_1=1$-gyel is teljesül, azonban innen az $x_1(x_1-1)$ tényezőt nemcsak szabad mellőznünk, hanem kell is; ugyanis erre a két számra, és csak ezekre $x_1^2=x_1$, ezek mellett tehát (6) és (7) nem fejezik ki azt a követelésünket, hogy x_1 és $x_2=x_1^2$ egyenletünk gyökeit, azaz *mindkét gyökét* jelentsék. Az $x_1=0$ és $x_1=1$ különleges esetek vizsgálatára viszont még vissza kell térnünk.

Most már a (8)-ból megmaradó

$$ax_1^2+ax_1+b=0 \text{ -}$$

ból és (6)-ból a négyzetes tagot kiküszöbölve

$$(a-b)x_1+(b-c)=0. \tag{9}$$

Ha evvel egy csapásra az x_1-ben elsőfokú tag is kiesett volna, azaz $a-b=0$ volna, akkor $b-c=0$ is teljesülne, tehát $a=b=c$. Ezt az esetet mellőzhetjük, mert az $ax^2+ax+a=0$ egyenletnek nincs (valós) gyöke. Eszerint (9)-ből

$$x_1=\frac{c-b}{a-b},$$

és ennek (6)-ba behelyettesítésével, rendezés után a keresett szükséges feltétel:

$$a^2c+ac^2-3abc+b^3=0, \tag{10}$$

vagy $a=1$, $b=p$, $c=q$-val

$$q+q^2-3pq+p^3=0.$$

Visszatérve az $x_1=0$ és $x_1=1$ esetekre, ezekkel az $x_2=0^2=0$, ill. $x_2=1^2=1$ követelésünk csak akkor teljesül, ha ezek kétszeres gyökök, vagyis ha az egyenlet $ax^2=0$, ill. $a(x-1)^2=ax^2-2ax+a=0$. A közvetlen ellenőrzés mutatja, hogy (10) mindkét esetre teljesül.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Annyi előnyt mégis mutat ez a megoldás az első mellett, hogy kiemeli azt a két számot, amely követelményünk szempontjából külön figyelmet érdemel. – A nyert feltétel elegendő volta legegyszerűbben a gyökök és együtthatók közti összefüggés felhasználásával látható be. Ezzel (10) bal oldala így írható:

$$\begin{aligned}
&a^3x_1x_2+a^3x_1^2x_2^2+3a^3(x_1+x_2)x_1x_2-a^3(x_1+x_2)^3=\\
&\quad=a^3(x_1x_2+x_1^2x_2^2-x_1^3-x_2^3)=a^3\left[x_1(x_2-x_1^2)+x_2^2(x_1^2-x_2)\right]=\\
&\quad=a^3(x_1-x_2^2)(x_2-x_1^2).
\end{aligned}$$

Ez valóban csak úgy lehet az $a\neq 0$ esetben 0, ha $x_1=x_2^2$, vagy $x_2=x_1^2$.