I. megoldás: Feladatunk állítása úgy is kimondható, hogy az O pontnak S-re vonatkozó T tükörképe rajta van annak a hat síknak mindegyikén, amelyek egy–egy él felezőpontján áthaladva a szembenfekvő élre merőlegesen állnak. Az állítást ebben az alakban fogjuk bizonyítani, így ugyanis nincs szükség arra, hogy külön vizsgáljuk azt az esetet, amikor O és S egybeesnek, és így az OS egyenes nincs egyértelműen meghatározva.

Jelöljük az $ABCD$ tetraéder tetszés szerint választott BC, AD szembenfekvő éleinek felezőpontjait F_1, ill. F_2-vel és az ezeken át AD-re merőlegesen állított síkokat σ_1, ill. σ_2-vel. Minthogy szerkesztésüknél fogva σ_1 és σ_2 párhuzamosak, továbbá S felezi a végpontjaival σ_1, ill. σ_2-re támaszkodó F_1F_2 szakaszt, azért σ_1 tükörképe σ_2-nek S-re vonatkozóan. Ámde O rajta van σ_2-n, ennélfogva S-re vonatkozó T tükörképe rajta van σ_1-en, amit bizonyítani akartunk. Mindez akkor is érvényes, ha σ_1 és σ_2 egybeesnek. Meggondolásunk bármely szemköztes élpárra alkalmazható, mert a BC, AD élpárnak semmi olyan tulajdonságát nem használtuk ki, ami ne volna meg bármely szemköztes élpárnak (nincs is ilyen a feltevésben, hiszen tetszőleges tetraéderről szól az állítás). Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Grallert Ferenc (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

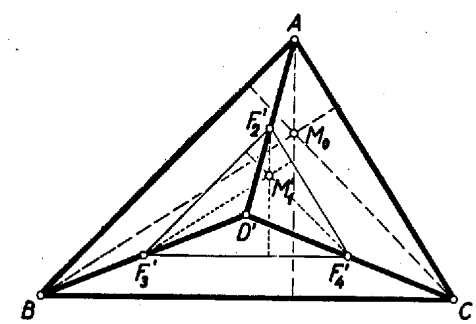
II. megoldás: Az O és T, valamint a fenti F_1, F_2 pontok paralelogrammát határoznak meg, mert az OF_2TF_1 négyszög OT és F_1F_2 átlóinak közös a felezőpontja: S, tehát $TF_1 \parallel OF_2$. Ámde O definíciója folytán OF_2 merőleges AD-re, így TF_1 is merőleges AD-re, tehát T benne van az F_1-en át AD-re merőlegesen állított síkban.

Náray Miklós (Bp. VIII., Széchenyi I. g. III. o. t.)

III. megoldás: Az O és T tükrösségére gondolva tekintsük az egész $ABCD$ tetraédernek az S súlypontra vonatkozó $A'B'C'D'$ tükörképét. Minthogy S közös felezőpontja a három szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasznak, azért $A'B'C'D'$ élfelező pontjai egybeesnek $ABCD$-éivel pl. (az előző megoldások jelöléseivel) $A'D'$-nek F_2' felezőpontja egybeesik BC-nek F_1 felezőpontjával. És mivel még $A'D'$ párhuzamos AD-vel, azért az F_1 en át AD-re merőlegesen álló sík egybeesik az F_2'-n át $A'D'$-re merőlegesen álló síkkal, azaz $A'D'$ felezőmerőleges síkjával, tehát átmegy $A'B'C'D'$ körülírt gömbjének O' középpontján, ami pedig a tükrözés folytán éppen O-nak S-re vonatkozó tükörképe. Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Montvay István (Bp. XIX. Landler J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Jelöljük a D csúcsból kifutó DA, DB, DC élek felezőpontjait F_2, F_3, F_4-gyel. Az $F_2F_3F_4$ háromszög a D középpontra nézve hasonló helyzetű az ABC háromszöggel, ennélfogva az F_2, F_3, F_4-en át a BC, CA, ill. AB élre merőlegesen álló síkok egyben F_3F_4, F_4F_2, ill. F_2F_3-ra is merőlegesek, így az $F_2F_3F_4$ síkot az $F_2F_3F_4$ háromszög magasságvonalaiban metszik, egymást pedig abban a t_D egyenesben, amely átmegy az $F_2F_3F_4$ háromszög M_1 magasságpontján és merőleges az ABC síkra.



(Az ábra a tetraédernek az ABC síkon való merőleges vetületét mutatja, erre utalnak a síkon kívüli pontok jelei mellett álló vesszők.) Eszerint T a t_D-n van. Az $F_2F_3F_4$ háromszöget a tetraéder egyik (a D csúcshoz tartozó) középmetszetének nevezve és a középmetszetet mindegyik csúcshoz elkészítve a bebizonyított állítás egy része így is kimondható: a tetraéder középmetszeteinek magasságpontjain át az illető középmetszetek síkjára állított merőlegesek egy ponton mennek át.

Ha $ABCD$ ortocentrikus, akkor $F_2F_3F_4D$ is ortocentrikus, ezért D-ből kiinduló közös magasságvonaluk átmegy az $F_2F_3F_4$, ill. ABC lap M_1, ill. M_0 magasságpontján, azaz t_D átmegy az M_0 ponton. Eszerint T-nek az $ABCD$ tetraéder mindnégy lapján való vetülete az illető lap magasságpontja, tehát T maga azonos a tetraéder magasságpontjával.