I. megoldás: Tegyük fel, hogy a pozitív u szám gyöke egyenletünknek, azaz fennáll az

$$u^3 - au^2 - bu - c = 0 \tag{1}$$

egyenlőség. Megmutatjuk, hogy nincs az egyenletnek u-nál nagyobb gyöke, azaz nincs olyan pozitív y, amellyel $u + y$ is gyök.

Egyenletünk bal oldala $x = u + y$ helyettesítéssel, majd (1) figyelembevételével így alakítható:

$$\begin{gathered} y^3 + (3u - a)y^2 + (3u^2 - 2au - b)y + (u^3 - au^2 - bu - c) = \\ = y\big[y^2 + (3u - a)y + (3u^2 - 2au - b)\big] = y(y^2 + py + q). \end{gathered}$$

Itt feltevéseink folytán mindkét együttható pozitív, ugyanis (1) felhasználásával

$$\begin{gathered} p = 3u - a = 2u + (u - a) = 2u + \frac{bu + c}{u^2} > 0, \\ q = 3u^2 - 2au - b = u^2 + u(u - a) + (u^2 - au - b) = \\ = u^2 + \frac{bu + c}{u} + \frac{c}{u} > 0, \end{gathered}$$

ennélfogva az $y(y^2 + py + q)$ kifejezés értéke minden $y > 0$-ra pozitív, valóban seholsem 0.

Megállapításunkat a legkisebb pozitív gyökre alkalmazva adódik, hogy az az egyetlen pozitív gyök.

Hasonló átalakítással bármely olyan polinomra belátható az ún. „Descartes–féle jelszabály” érvényessége, amelyben egyetlen „jelváltás” lép fel.

II. megoldás: Jelöljük az adott egyenlet gyökeit x_1, x_2, x_3-mal és fejtsük ki polinommá az egyenletnek a gyöktényezős alakját. Mivel x^3 együtthatója 1:

$$\begin{gathered} (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + \\ +(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0, \end{gathered}$$

azért a gyökök és az első együttható megegyezése folytán ennek és az adott egyenletnek minden további együtthatója megegyezik:

$$x_1 + x_2 + x_3 = a, \tag{1}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -b, \tag{2}$$
$$x_1x_2x_3 = c. \tag{3}$$

Tegyük fel egyelőre, hogy mind a három gyök valós, és egyik sem 0. Ekkor (3)-ból $c \neq 0$, így a három gyök szorzata feltevésünk folytán: $c > 0$, ez pedig csak úgy lehetséges, ha a negatív gyökök száma páros: 2 vagy 0, és így a pozitívok száma 1 vagy 3. Három pozitív gyök lehetőségét azonban (2) kizárja, mert aszerint a kéttényezős szorzatok $-b$ összege nem pozitív, itt tehát a pozitív gyökök száma valóban pontosan 1.

Ha a gyökök közül pontosan egy, pl. $x_3 = 0$, úgy összefüggéseink egyszerűsödnek:

$$x_1 + x_2 = a, \tag{1a}$$
$$x_1x_2 = -b (> 0), \tag{2a}$$

és (2a)-ból nyilvánvaló, hogy – az állításnak megfelelően – egy pozitív és egy negatív gyök van.

Ha $x_2 = x_3 = 0$, akkor már nincs mit bizonyítanunk.

Ha pedig egyenletünknek komplex gyöke is van, pl. $x_1 = p + qi$, ahol p és q valósak és $q \neq 0$, azaz fennáll:

$$(p^3 - ap^2 - bp - c - 3pq^2 + aq^2) + (3p^3 - 2ap - b - q^2)qi = 0,$$

ami azt jelenti, hogy mindkét zárójeles kifejezés 0 (azt természetesen feltételezzük, hogy a, b, c valósak), akkor x_1-nek $x_2 = p - qi$ konjugáltja – amelyre $x_2 \neq x_1$ – ugyancsak gyök, így a három gyök közül ismét legfeljebb egy lehet pozitív.

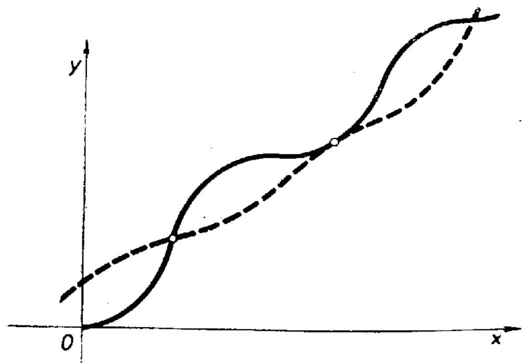
Nagy Judit (Szombathely, Kanizsai Dorottya lg. III. o. t.)

Megjegyzés: Néhány „második megoldás” az egyenletet $x^3 = ax^2 + bx + c$ alakba írva a pozitív gyökök számáról a „jól ismert” $y = x^3$ és $y = ax^2 + bx + c$ görbék grafikonja alapján a következőképpen kívánt tájékozódni.

„A valós gyököket a két görbe közös pontjaihoz tartozó abszcisszák adják. Az $y = x^3$ görbe mindenütt emelkedve a III. negyedből az origón át az I. negyedbe lép, menetéből minket csak az I. negyedbeli ív érdekel. Pozitív x-ekre az $y = ax^2 + bx + c$ görbe is mindenütt emelkedik (pontosabban: sehol sem süllyed); ugyanis $a \neq 0$ esetén az

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

átalakítás szerint a parabola csúcsa „alul” van éspedig a nem pozitív $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ abszcisszán; $a=0$, és $b\neq 0$ esetén $b>0$ és így az $y=bx+c$ egyenes minden x-re emelkedik; végül $a=b=0$ esetén az $y=c(\geq 0)$ egyenes párhuzamos az X-tengellyel. Minthogy továbbá az $y=ax^2+bx+c$ görbe az I. negyedbe az Y-tengely $c\geq 0$ ordinátájú pontján át lép be, azért a két görbének az I. negyedben csak egy közös pontja lehet”.



Ebben a meggondolásban csak az utolsó mondat hibás; nem biztos ugyanis, hogy két emelkedő görbeív legfeljebb egy pontban metszi egymást, emelkedés közben „kanyarogva” ábránk szerint akárhány közös pontjuk lehet. Az ilyen megoldások szerzői burkoltan a vizsgált görbék „simaságára”, keveset kanyargó voltára gondoltak. Az I. megoldás tulajdonképpen azt mutatta meg, hogy az u abszcisszájú közös ponttól jobbra nem lehet további közös pont, mert minden $x>u$-ra az $y=x^3$ görbe ordinátája nagyobb az $y=ax^2+bx+c$ görbe ordinátájánál.

Tanulságul jegyezzük meg: a szemlélet gyakran jó ötleteket ad, de rendszerint egyes esetre vonatkozik és így forrása lehet elsietett általánosításoknak.