Kifejezésünk tagjai háromtagú mértani sorozatot alkotnak 1-gyel mint kezdő taggal és a^5 hányadossal, ennélfogva a kifejezés $a^5 \neq 1$ (azaz $a \neq 1$) esetén az ismert összegképlettel, majd az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére vonatkozó azonosság ismételt alkalmazásával így alakítható:

$$1+a^5+a^{10}=\frac{\left(a^5\right)^3-1}{a^5-1}=\frac{\left(a^3\right)^5-1^5}{a^5-1^5}=\frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$

$$=(a^2+a+1)\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}.$$

Az utolsó alakbeli hányadosban az osztást végrehajtva polinomot kapunk, ennek alapján

$$a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$$

és ezzel eleget tettünk a feladat követelésének.

Átalakításunk az $a=1$ esetre nem érvényes, viszont a közvetlen behelyettesítés mutatja, hogy az egyenlőség erre a kivételes esetre is fennáll.

Ujtelki Anna (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)