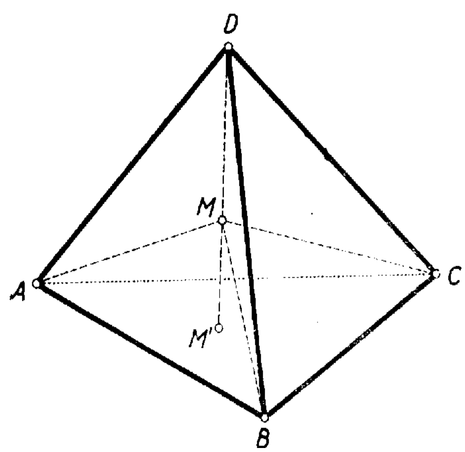
Elég megmutatnunk, hogy az $ABCM$ tetraédernek mind a négy magasságvonala átmegy D-n, vagyis D ortocentruma, magasságpontja $ABCM$-nek. Az M-ből kiinduló magasság, azonos MD-vel, mert $ABCD$ ortocentrikussága folytán D-nek és M-nek közös az ABC-n való merőleges vetülete, éspedig az $ABC\triangle$ magasságpontja. [1] Az A-ból kiinduló magasság AD, mert egyrészt $ABCD$ ortocentrikus és így $BC \perp AD$, másrészt BM-nek az ACD lapra való merőlegességéből $BM \perp AD$, eszerint a BC és BM egyenesekkel meghatározott BCM sík és AD merőlegesek egymásra. B és C ugyanolyan kapcsolatban vannak M és D-vel, mint A, ezért a B-ből és C-ből induló magasságvonalak is átmennek D-n, és ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Kolonits Ferenc (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az A-ból kiinduló magasságra vonatkozó meggondolás elveszti alapját, ha a BC és BM egyenesek egybeesnek, más szóval, ha M ráesik BC-re. Ez a körülmény az [1] alatt idézett tulajdonsággal egybevetve azt jelenti, hogy ilyenkor az $ABC\triangle$ M' magasságpontja BC-n van, ami – mint könnyen belátható – csak úgy lehetséges, ha e háromszög B vagy C-nél derékszögű. Ilyenkor M' és vele M ezen derékszög csúcsába esik, így az $ABCM$, $ABDM$, $ACDM$ és $BCDM$ tetraéderek közül három síkidommá fajul el, a negyedik azonos $ABCD$-vel és állításunk értelmetlenné, ill. ismétléssé válik.

2. Könnyű belátni, hogy a D csúcs ABC-n való merőleges vetületének az $ABC\triangle$ M' magasságpontjával való egybeesése elegendő feltétel ahhoz, hogy az $ABCD$ tetraéder ortocentrikus legyen. Eszerint M helyett a DM' magasságvonalnak M' kivételével bármely pontja az A, B, C csúcsokkal együtt ortocentrikus tetraédert határoz meg.



3. Az $ABCM$ ortocentirikussága így is belátható: AM a magasságpont értelmezésénél fogva merőleges a BCD síkra, és így a benne fekvő BC egyenesre; hasonlóan BM és AC, valamint CM és AB is merőlegesek. Így azonban még hátra van annak megmutatása, hogy az ortocentrum éppen az M-mel felváltott D csúcsban van.

[1] Lásd KML. XVI. köt. 34. o.