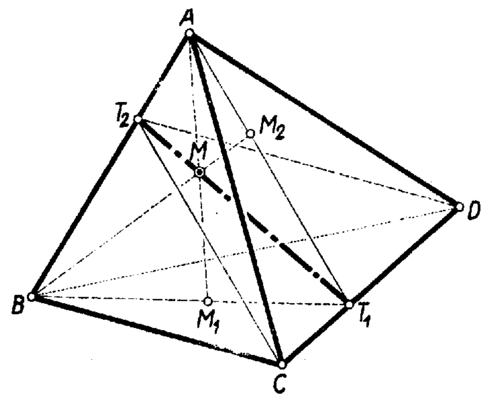
I. megoldás: Tekintsük az $ABCD$ ortocentrikus tetraéder AB és CD éleit. Minthogy ezek merőlegesek egymásra, azért mindegyiken át fektethető egy és csak egy a másikra merőleges sík; jelöljük ezeknek a CD, ill. az AB egyenessel való metszéspontját T_1, ill. T_2-vel. A T_1T_2 egyenes mindkét síkban benne van, ez a metszésvonaluk.



Az ABT_1 síknak minden egyenese, így T_1T_2, továbbá AT_1 és BT_1 merőleges CD-re, hasonlóan CDT_2-nek T_1T_2, valamint CT_2 és DT_2 egyenesei merőlegesek AB-re. Eszerint egyrészt T_1T_2 az AB és CD egyenesek mindegyikére merőleges, mindegyikét metszi, tehát ez az (egyetlen) normál tranzverzálisuk, másrészt T_1, ill. T_2 az ACD és BCD, ill. CAB és DAB lapháromszögek AT_1 és BT_1, ill. CT_2 és DT_2 lap-magasságainak a CD, ill. AB oldalon való talppontjai. Ezzel a feladat második állítását a vizsgált élpárra vonatkozóan bebizonyítottuk.

Minthogy egyetlen élnek sincs a többivel szemben valami megkülönböztető tulajdonsága, azért bizonyításunk bármelyik szemközti élpárra érvényes. Ugyanígy a feladat első állításának bizonyításában is elég lesz egy élpárral és normál tranzverzálisával foglalkozni.

A tetraéder A-ból vont AM_1 magassága merőleges a BCD lap síkjára, ennek minden egyenesére, így CD-re is, ennélfogva benne van az egyetlen olyan síkban, amely átmegy A-n és merőleges CD-re, vagyis ABT_1-ben. Ugyanígy a B-ből vont BM_2 magasság is benne van ABT_1-ben, következésképpen ez áll a tetraéder M magasságpontjára is mint AM_1 és BM_2 metszéspontjára. Hasonlóan a C és D csúcsokból vont magasságvonalakkal együtt a CDT_2 síkban is benne van M, ennélfogva e két síknak T_1T_2 metszésvonalán is. Ezzel a feladat első állítását is bebizonyítottuk.

Szebeni András (Bp. I., Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Bizonyításunkból az is következik, hogy a normál tranzverzálisoknak a lapsíkokra való merőleges vetületei a lapok magasságvonalaira esnek.

II. megoldás: A normál tranzverzálisoknak M-en való áthaladását abból is beláthatjuk, hogy AM_1 merőleges a BCD síknak BT_1 egyenesére, ugyanígy BM_2 merőleges az ACD sík AT_1 egyenesére, ezért AM_1 és BM_2 egyszersmind az $ABT_1\triangle$-nek is egy-egy magasságvonala, ennélfogva M metszéspontjukon – amely feltevésünk szerint a tetraéder mind négy magasságának közös pontja – a háromszög harmadik magasságvonala is átmegy. Ez pedig éppen a T_1T_2 normáltranzverzális, amelynek AB-re merőleges voltát már fentebb láttuk.

Kisvölcsey Jenő (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)