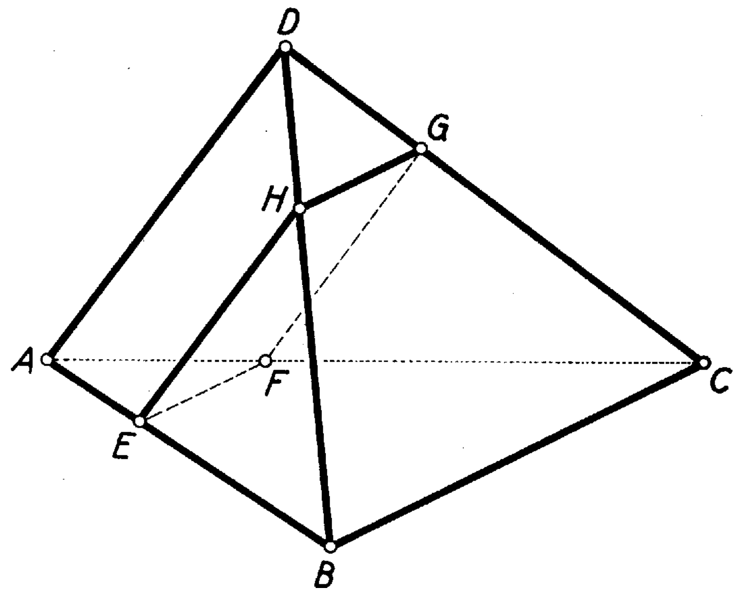
Négyszögmetszete mindenesetre van az $ABCD$ háromoldalú gúlának. Ha ugyanis az E, F, G pontokat az AB, AC, ill. CD él belsejében választjuk, akkor az $EFG = \sigma$ sík (amely egyértelműen meg van határozva, mert G nem esik az EF egyenesre, hiszen EF benne van az ABC lapsíkban, G pedig nincs benne) a BD élt is egy közbülső H pontban metszi.



Ugyanis σ nem párhuzamos a BCD lapsíkkal, mert van közös pontjuk: G, nem is azonos vele, mert E és F pontjai nincsenek benne BCD-ben, ennélfogva σ metszi BCD-t egy a G-n átmenő és a DC-től különböző s egyenesben. s-et G két félegyenesre választja szét, ezek egyike G-nél belép a $BCD\triangle$-be. Ennek H kilépési pontja nem lehet BC-n, mert akkor σ az E, F, H pontok révén azonos lenne ABC-vel, ennélfogva H valóban a BD élen van és σ-nak a gúlával való metszésidoma az $EFGH$ négyszög.

a) Már most, hogy $EFGH$ paralelogramma legyen, ehhez szükséges és elegendő, hogy szembenfekvő oldalai párhuzamosak legyenek. Mivel pedig az EF és HG oldalak az egymással szöget bezáró ABC, ill. DBC síkban vannak (1. ábra), azért akkor és csak akkor párhuzamosak (akkor és csak akkor nem metszik egymást), ha σ nem metszi ezen síkok BC metszésvonalát, másszóval ha σ párhuzamos BC-vel. Hasonlóan EH és FG párhuzamosságához szükséges és elegendő, hogy a párhuzamos legyen AD-vel. Így az egymástól különböző AD és BC egyenesek σ állását egyértelműen meghatározzák. Konkrétan: E, F, G-t a megfelelő élek F_1, F_3, F_2 felezőpontjában választva a $\sigma_0 = F_1F_2F_3$ sík is ilyen állású (lásd a 887. feladat 1. ábráját, 3–4. sz. 112. o.). Minden a σ_0-val párhuzamos sík – ha egyáltalán metszi a gúlát, vagyis az AB egyenessel való E metszéspontja belső pontja az AB szakasznak, paralelogrammát metsz ki belőle.

Hasonlóan látható be, hogy az AB és CD, valamint az AC és BD élpárokkal párhuzamos síkok is – ha a gúla egy élét közbülső pontban metszik –, akkor paralelogrammát metszenek ki belőle. Máshogyan paralelogramma-metszet nem jön létre.

b) A rombusz speciális paralelogramma, ezért rombusz-metszeteket csak az eddig kapottak közül kereshetünk, az $EF = EH$ követelménnyel. Ilyen metszet mindig van, ugyanis míg a σ_0-val párhuzamos síknak AB-vel való E metszéspontja A-tól B-ig halad, azalatt EF 0-tól BC-ig folytonosan növekszik, EH viszont AD-től 0-ig folytonosan csökken, eközben egyetlen helyzetben a kívánt egyenlőség beáll. Eszerint minden háromoldalú gúlának három rombusz-metszete van.

Az E pont rombuszt adó helyzetének meghatározásához AE-t és a rombusz oldalát a gúla-lapokon létrejött hasonlóságok alapján ki is számíthatjuk:

$$\frac{AE}{AB}\cdot BC = EF = EH = \frac{EB}{AB}\cdot AD = \frac{AB-AE}{AB}\cdot AD,$$

és innen

$$AE = \frac{AB\cdot AD}{AD+BC} \qquad \text{továbbá} \qquad EF = EH = \frac{AD\cdot BC}{AD+BC}.$$

c) $EFGH$ paralelogrammánk akkor és csak akkor specializálódik téglalappá, ha $BC \perp AD$. Ha ez teljesül, akkor minden a BC és AD élekkel párhuzamos sík – ha egyáltalán metszi a gúlát – téglalapot metsz ki belőle. Tudjuk az alább idézett cikkből (33–34. o.), hogy a háromoldalú gúlának vagy nincs egymásra merőleges szemközti élpárja, vagy egy ilyen van, vagy pedig mindhárom pár ilyen, eszerint az *a)* pontban nyert sík-állások közül 0, 1 vagy 3 ad téglalap metszeteket.

Ha van téglalap metszet, akkor a *b)* pont alapján közülük egy és csak egy helyzetben derékszögű rombusz, azaz négyzet lesz a síkmetszet.

Megjegyzés: Négyszög alakú metszet létezésének kérdésében arra is hivatkozhatunk, hogy paralelogramma – (sőt bizonyos esetekben téglalap-) metszet-idomot láttunk *Molnár Ferenc*nek A tetraéder nevezetes pontjairól szóló cikkében.[1] Bár az ott kimondott tétel egy bizonyos többlet-követelményt teljesítő, ún. ortocentrikus tetraéderre vonatkozik, ezt a feltevést annak kimutatásában, hogy az $F_1F_3F_2F_4$ négyszög paralelogramma, nem használja ki a cikk, ennélfogva két szembenfekvő élpárnak négy felezőpontja minden háromoldalú gúlában paralelogrammát határoz meg (és ez ortocentrikus tetraéderben téglalappá specializálódik).

[1] KML. XVI. kötet 35. o. 10. ábra, 1958 február.