I. megoldás: Tegyük fel, hogy az $x=a$ szám az adott egyenletnek kétszeres gyöke. Ekkor az egyenlet baloldala Bézout tétele szerint maradék nélkül osztható $(x-a)^2$-nel. Már most az $(x^5-5x+c):(x^2-2ax+a^2)$ osztásban a hányados x-től független tagjával végzett műveletszakasz után a hányados: $x^3+2ax^2++3a^2x+4a^3$ és a maradék $5(a^4-1)x-(4a^5-c)$. E polinomnak azonosan el kell tűnnie, ennélfogva a és c között olyan összefüggéseknek kell állnia, amelyek mellett mindkét együtthatója 0:

$$5(a^4-1)=0 \qquad \text{és} \qquad 4a^5-c=0.$$

Az elsőből $a^4=1$, eszerint kétszeres gyökként (valós értékekre szorítkozva) csak az

$$a_1=1, \quad a_2=-1$$

számok jöhetnek szóba és ezekkel a második egyenletből a keresett c értékek

$$c_1=4a_1^5=4a_1=4, \quad c_2=-4.$$

Nagy Elemér (Bp. I., Toldy F. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Ha $x=a$ kétszeres gyöke az adott egyenletnek, akkor az egyenlet bal oldala felírható az $(x-a)^2$ másodfokú és valamely harmadfokú polinom szorzataként (ebben x^3 együtthatója 1):

$$\begin{gathered}x^5-5x+c=(x^2-2ax+a^2)(x^3+bx^2+dx+e):x^5+(b-2a)x^4+\\+(d-2ab+a^2)x^3+(e-2ad+a^2b)x^2+(-2ae+a^2d)x+a^2e.\end{gathered}$$

A két oldal azonos egyenlősége alapján a megfelelő együtthatók megegyezéséből a, b, c, d, e-re a következő öt egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
b-2a &= 0, && (1)\\
d-2ab+a^2 &= 0, && (2)\\
e-2ad+a^2b &= 0, && (3)\\
-2ae+a^2d &= -5, && (4)\\
a^2e &= c. && (5)
\end{aligned}$$

Itt (1)-ből $b=2a$, ezt (2)-be beírva $d=3a^2$, ezzel (3)-ból $e=4a^3$, d és e-vel (4)-ből $a^4=1$, végül e-vel (5)-ből $c=4a^5$, vagyis a és c-re ezúton is az I. megoldásbeli eredményekhez jutottunk, a megoldás az ott látott módon fejezhető be.

Elbert Árpád (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)

III. megoldás: Bebizonyítjuk, hogy a

$$g(x)=x^n-na^{n-1}x+a^n(n-1)=0$$

egyenletnek $x=a$ kétszeres gyöke; másképpen: $g(x)$ osztható $(x-a)^2$-nel. Alakítsuk át $g(x)$-et:

$$\begin{gathered}g(x)=x^n-a^n-na^{n-1}x+na^n=(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)=\\=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}-na^{n-1}).\end{gathered}$$

A második zárójelbeli polinom értéke $x=a$ esetén 0, tehát az Bézout tétele szerint osztható $(x-a)$-val, ennélfogva $g(x)$ valóban osztható $(x-a)^2$-nel.

Adott egyenletünk bal oldalának első két tagja $g(x)$ első két tagjának speciális esete $n=5$ és $-5a^4=-5$, azaz $a^4=1$-gyel, vagyis (valós értékekre szorítkozva) $a=1$-gyel és $a=-1$-gyel. A tétel következménye akkor érvényes egyenletünkre, ha a megfelelés a harmadik tagok között is fennáll, vagyis ha $c=4a^5$, azaz $c=4$ ill. $c=-4$.

Lőrinczy László (Szolnok, Verseghy F. g. IV. o. t.)
Tatai Péter (Bp. XIV. I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés: Általában bizonyítható, hogy az $x^5+ax+c=0$ egyenletnek akkor és csak akkor van többszörös gyöke, ha $\left(\frac{c}{4}\right)^4+\left(\frac{a}{5}\right)^5=0$.[1] Esetünkben $a=-5$, tehát $c=4$.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

---

[1] Lásd pl. *Szele Tibor:* Bevezetés az algebrába (Egyetemi tankönyv) Tankönyvkiadó, 1953, 220. o.