I. megoldás: Írjuk fel az n számú egymástól különböző pozitív szám mértani és számtani középértékei közti ismert egyenlőtlenséget[1] az 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{n-1} számokra és fejezzük ki a kapott összegeket zárt alakban a számtani ill. a mértani sor összegképlete alapján:

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^{n-1}}=\sqrt[n]{2^{0+1+2+\ldots+(n-1)}}=\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=2^{\frac{n-1}{2}}<$$
$$<\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}{n}=\frac{2^n-1}{n},$$

azaz

$$2^{\frac{n-1}{2}}<\frac{2^n-1}{n}.$$

Innen – mindkét oldalt $n>1>0$-val szorozva, majd 1-gyel növelve éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Elekes Béla (Bp. I., Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Hasonlóan bizonyítható, hogy az adott egyenlőtlenségben 2-nek (mint alapnak) bármely $a>2$ számmal való helyettesítésével adódó

$$1+na^{\frac{n-1}{2}}<a^n$$

egyenlőtlenség is érvényes minden $n>1$ egész számra; a módosulás csak annyi, hogy az $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}$ összeg zárt alakjából az $a-1>1$ nevezőt elhagyjuk, és evvel a jobb oldal még nagyobbá válik.

Megyesi László (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az egyenlőtlenség helyes voltát a teljes indukció módszerével bizonyítjuk. $n=2$ és $n=3$-ra az állítás helyes, mert a helyettesítéssel adódó $1+2\sqrt{2}<4$ és $7<8$ egyenlőtlenségek fennállanak. Feltesszük, hogy n helyén valamely $k\geqq 3$ számra igaz az állítás:

$$1+k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}<2^k, \tag{1}$$

és bebizonyítjuk, hogy akkor n helyén az 1-gyel nagyobb $k+1$-gyel is igaz:

$$1+(k+1)2^{\frac{k}{2}}<2^{k+1}. \tag{2}$$

A (2) jobb oldalát (1) felhasználásával így alakíthatjuk át:

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2\left(1+k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\right)=2+k\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{k}{2}}>1+k\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{k}{2}}. \tag{3}$$

Itt a jobb oldal (2) bal oldalától csak abban tér el, hogy az itteni $k\sqrt{2}$ szorzó helyén ott $k+1$ áll. Ámde ezek között a

$$k\sqrt{2}>k+1$$

egyenlőtlenség áll, amely a minden $k\geqq 3$-ra érvényes

$$\sqrt{2}>1+\frac{1}{k}$$

egyenlőtlenségnek k-val való szorzásával áll elő. Eszerint (3) utolsó tagjában $k\sqrt{2}$ helyett $k+1$-et írva az egyenlőtlenség még inkább áll, vagyis (2)valóban helyes.

Hajna János (Pécs, Széchenyi I. g. II. o. t.)

[1] Lásd pl. *Kürschák-Hajós-Neukomm-Surányi:* Matematikai Versenytételek I. rész, Tankönyvkiadó, 1955, 111. o.