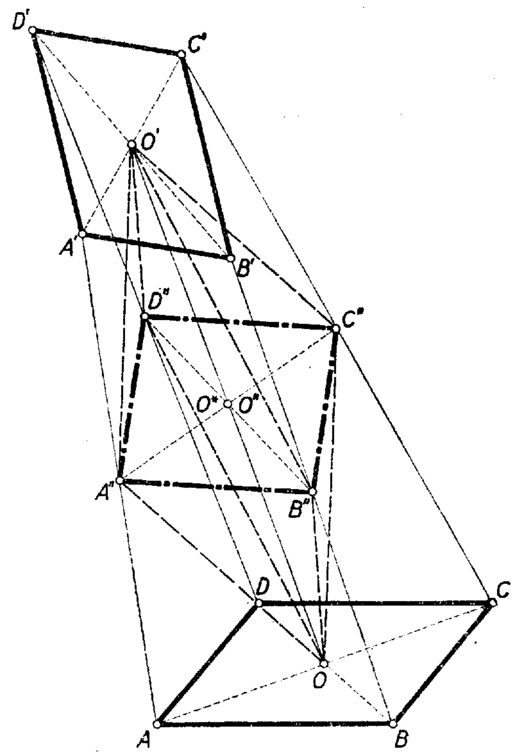
I. megoldás: Jelöljük az AA', BB', CC', DD' szakaszok felezőpontját A'', B'', C'' ill. D''-vel, és az adott paralelogrammák átlóinak, valamint az $A''B''C''D''$ négyszög $A''C''$ és $B''D''$ átlóinak metszéspontját rendre O, O', O''-vel (1. ábra).



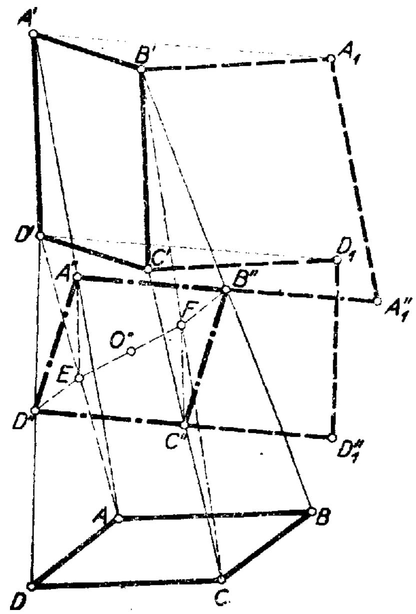
1. ábra

O ill. O'-ben a feltevés szerint az AC és BD ill. $A'C'$ és $B'D'$ átlók felezik egymást. Megmutatjuk, hogy O'' ugyancsak felezi az $A''C''$ és $B''D''$ átlókat, ebből már következik, hogy $A''B''C''D''$ paralelogramma.

Ismeretes, hogy bármely $MPRT$ négyszög MP, PR, RT, TM oldalainak N, Q, S, U felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg. Ismételjük, hogy $MPRT$ bármely négyszög lehet, konkáv és hurkolt is, sőt $NQ = SU$ és $QS = UN$ akkor is fennáll, ha M, P, R, T között egybeeső pontok is fordulnak elő; két egybeeső pont közti „szakasz" felezőpontja természetesen azonos a két végponttal. Ezt az $ACC'A'$ és $BDD'B'$ négyszögekre alkalmazva (amelyek konkávok is lehetnek, vagy más, most említett tulajdonságuk is lehet) kapjuk, hogy az $OC''O'A''$ és $OD''O'B''$ négyszögek paralelogrammák. Ebből következik, hogy OO' közös átlójuknak O^* felezőpontja másik átlóikon, $C''A''$ ill. $D''B''$-n is rajta van, tehát azonos ezeknek O'' metszéspontjával, továbbá, hogy O'' felezi $C''A''$ és $D''B''$-t. Ez éppen az, amit bizonyítani akartunk.

Füle Károly (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyen AD' és CB' felezőpontja E ill. F, és EF felezőpontja O^* (2. ábra).



2. ábra

Ekkor egyrészt $A''E \parallel A'D' \parallel B'C' \parallel FC''$ és $D''E \parallel DA \parallel CB \parallel FB''$, és az említett 4–4 szakasz irányítása is egyező, ennélfogva $A''ED''\sphericalangle = C''FB''\sphericalangle$; másrészt $A''E = \frac{1}{2}A'D' = \frac{1}{2}B'C' = FC''$ és $D''E = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}CB = FB''$; tehát az $EA''D''$ és $FC''B''$ háromszögek tükrös párok az O^* pontra vonatkozóan, ennélfogva $A''D''\#C''B''$, és így az $A''B''C''D''$ négyszög paralelogramma. (Ha $AD \parallel A'D'$, akkor az E, A'', D'' és F, C'', B'' ponthármasok nem alkotnak háromszöget, egy-egy egyenesbe, esetleg egyetlen egyenesbe esnek, azonban a tükrösség fennáll.)

Ha a tükrösségből csak azt használnók ki, hogy $A''D'' = C''B''$, akkor a fentiekhez hasonlóan (ti. AB' és DC' felezőpontjainak felhasználásával) kaphatnók, hogy $A''B'' = C''D''$ és e két egyenlőségből is adódik $A''B''C''D''$-nek paralelogramma volta.

Mató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. III. o. t.)

III. megoldás: Forgassuk el az $ABB''A''$ és a $DCC''D''$ négyszöget B'' ill. C'' körül 180°-kal és legyen új helyzetük $A_1B'B''A_1''$ ill. $D_1C'C''D_1''$ (2. ábra, az új vonalak vastagon, szaggatva). Ekkor egyrészt $A''A'A_1A_1''$ és $D''D'D_1D_1''$ paralelogrammák, mert $A_1''A_1\#AA''\#A''A'$ ill. $D_1''D_1\#DD''\#D''D'$ (a párhuzamosságon felül az irányítások is egyeznek, ugyanígy a továbbiakban is), és ezért $A''A_1''(=2A''B'')\#A'A_1$ ill. $D''D_1''(=2D''C'')\#D'D_1$; másrészt az $A'B'A_1$ és $D'C'D_1$ háromszögekben $B'A'\#C'D'$ és $B'A_1\#AB\#DC\#C'D_1$, így az utóbbi háromszög az előbbiből $B'C'$ nagyságú és irányú eltolással is létrejön, tehát harmadik oldalaikra $A'A_1 = D'D_1$. E két eredmény egybevetéséből $A''B'' \parallel A'A_1 \parallel D'D_1 \parallel D''C''$ és $A''B'' = \frac{1}{2}A'A_1 = \frac{1}{2}D'D_1 = D''C''$, azaz $A''B''C''D''$-nek két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő, a négyszög paralelogramma.

Tatai Péter (Bp. XIV., I. István g. III. o. t.)

IV. megoldás: Ábránkra koordinátarendszert helyezve legyenek az adott paralelogrammák csúcsainak koordinátái:

$$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4);\quad A'(x_1',y_1'), B'(x_2',y_2'), C'(x_3',y_3'), D'(x_4',y_4'). \tag{1}$$

így a vizsgálandó felezőpontok koordinátái:

$$A''\left(\frac{x_1+x_1'}{2},\frac{y_1+y_1'}{2}\right), B''\left(\frac{x_2+x_2'}{2},\frac{y_2+y_2'}{2}\right), C''\left(\frac{x_3+x_3'}{2},\frac{y_3+y_3'}{2}\right),$$
$$D''\left(\frac{x_4+x_4'}{2},\frac{y_4+y_4'}{2}\right). \tag{2}$$

Párhuzamos és egyenlő szakaszoknak bármely egyenesre való vetületei egyenlők (azonos irányú vetítés esetén), tehát az $ABCD$ paralelogramma szemközti oldalpárjait mindkét tengelyre vetítve:

$$x_1 - x_2 = x_4 - x_3, \qquad y_1 - y_2 = y_4 - y_3,$$
$$x_1 - x_4 = x_2 - x_3, \qquad y_1 - y_4 = y_2 - y_3.$$

E négy egyenlőség csupán átrendezett alakja a következő kettőnek:

$$\frac{x_1+x_3}{2} - \frac{x_2+x_4}{2} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{y_1+y_3}{2} - \frac{y_2+y_4}{2} = 0, \tag{3}$$

amelyek együtt az átlók felezőpontjainak egybeesését fejezik ki, eszerint (3) teljesülése nemcsak szükséges, de elegendő feltétele is annak, hogy az (1) pontnégyes paralelogrammát alkosson. (Másrészt (3)-ban a koordinátageometria „nyelvén” az a tény is megmutatkozik, hogy egy paralelogramma három csúcsát és sorrendjüket ismerve, a negyedik csúcs meg van határozva; eszerint pl. x_4, y_4 felvétele lényegében felesleges volt, így viszont összefüggéseink szimmetrikusak.) Hasonlóan $A'B'C'D'$-re:

$$\frac{x_1'+x_3'}{2}-\frac{x_2'+x_4'}{2}=0 \qquad \text{és} \qquad \frac{y_1'+y_3'}{2}-\frac{y_2'+y_4'}{2}=0, \tag{4}$$

és bizonyításunk céljára elég megmutatni, hogy ugyanilyen összefüggés áll fenn a (2) koordináták között. Valóban, (3) és (4) összegének felezésével rendezés után

$$\frac{\frac{x_1+x_1'}{2}+\frac{x_3+x_3'}{2}}{2}-\frac{\frac{x_2+x_2'}{2}+\frac{x_4+x_4'}{2}}{2}=0,$$

$$\frac{\frac{y_1+y_1'}{2}+\frac{y_3+y_3'}{2}}{2}-\frac{\frac{y_2+y_2'}{2}+\frac{y_4+y_4'}{2}}{2}=0,$$

és evvel bizonyításunkat befejeztük.

Szatmári Gábor (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)