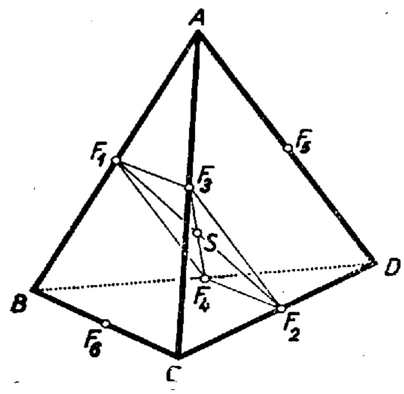
I. megoldás: Elég egyetlen szemközti élpár négyzetösszegéről megmutatni, hogy kifejezhető a tetraédernek valamely az ortocentrikusságból következő állandójával. Láttuk az idézett cikk 35. oldalán, hogy két szemközti élpár felezőpontjai bármely tetraéderben paralelogrammát határoznak meg, és hogy ez ortocentrikus tetraéderben – a szemközti élpárok merőlegessége folytán – téglalappá (egyenlő átlójúvá) specializálódik (1. ábra).



1. ábra

És mivel az $F_1F_2F_3F_4$ téglalap oldalai a lapháromszögekben egyszersmind középvonalak is, azért BC és AD négyzetösszege

$$BC^2 + AD^2 = 4F_1F_3^2 + 4F_3F_2^2 = 4F_1F_2^2 = 4F_3F_4^2,$$

vagyis azt kaptuk hogy ez a négyzetösszeg egyenlő a másik két éltengely négyzetének 4-szeresével. Ámde ortocentrikus tetraédernek mind a három éltengelye egyenlő az ilyenben létező „második Feuerbach-gömb” átmérőjével, eszerint a feladat állítását élesebben a következő alakban bizonyítottuk be: ortocentrikus tetraéderben a szemközti élek négyzetösszege egyenlő a második Feuerbach-gömb átmérője négyzetének 4-szeresével.

Gyene András (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Igaz a feladat állításának megfordítása is: *ha a szemközti élek négyzetösszege mindhárom élpárra ugyanakkora, akkor a tetraéder ortocentrikus.* Feltevésünk így írható:

$$BC^2 + AD^2 = CD^2 + AB^2 = DB^2 + AC^2 = k. \tag{1}$$

Írjuk fel az $F_1F_2F_3F_4$ paralelogrammára azt az ismert tényt, hogy négy oldalának négyzetösszege egyenlő két átlójának négyzetösszegével és szorozzuk ezt az egyenlőséget 2-vel:

$$4F_1F_3^2 + 4F_3F_2^2 = 2F_1F_2^2 + 2F_3F_4^2.$$

Innen $2F_1F_3 = BC$ és $2F_3F_2 = AD$ figyelembevételével

$$BC^2 + AD^2 = 2F_1F_2^2 + 2F_3F_4^2 = k, \tag{2}$$

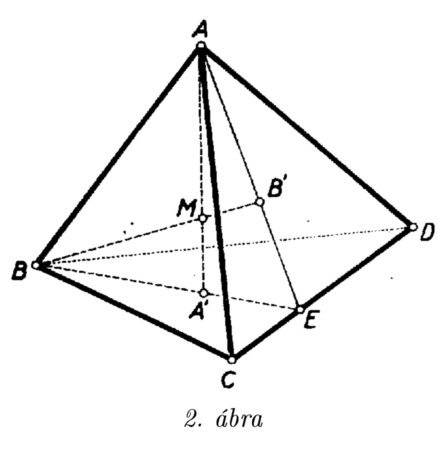
és hasonlóan

$$CD^2 + AB^2 = 2F_3F_4^2 + 2F_5F_6^2 = k, \tag{3}$$

$$DB^2 + AC^2 = 2F_5F_6^2 + 2F_1F_2^2 = k. \tag{4}$$

És most (2), (3) és (4) páronkénti egybevetésével azt kapjuk, hogy a három éltengely négyzete egyenlő, ezért – szakaszokról lévén szó maguk az éltengelyek is egyenlők, ebből pedig következik, hogy a tetraéder ortocentrikus.

II. megoldás: Jelöljük A' ill. B'-vel az A ill. B-ből kiinduló magasságvonalnak a BCD ill. ACD lapon való talppontját (2. ábra).



2. ábra

AA' és BB' feltevésnél fogva egy síkban vannak és ez merőleges az említett lapok közös CD egyenesére. E-vel e síknak CD-vel való metszéspontját jelölve a sík BE és AE egyenesei is merőlegesek CD-re, ennélfogva Pythagoras tételével

$$BC^2 = BE^2 + EC^2, \qquad BD^2 = BE^2 + ED^2,$$
$$AD^2 = AE^2 + ED^2, \qquad AC^2 = AE^2 + EC^2,$$

és innen összeadással

$$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2 \quad (= BE^2 + AE^2 + EC^2 + ED^2).$$

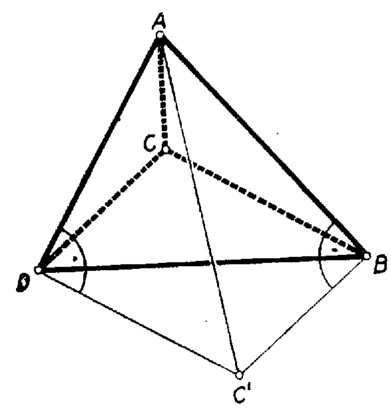
Hasonlóan kapjuk (pl. a BB' és CC' magasságokból kiindulva), hogy

$$BD^2 + AC^2 = CD^2 + AB^2$$

és evvel bizonyításunkat befejeztük.

Halász Gábor (Bp. II., Rákóczi F. g. III. o. t.)

III. megoldás: Két szemközti élpár négyzetösszegének egyenlőségét alkalmas tükrözéssel is bebizonyíthatjuk. Kössük össze C-nek a BD él felezőpontjára való C' tükörképét A, B, D-vel (3. ábra).



3. ábra

A kapott $BCDC'$ négyszög paralelogramma, és így $C'D \parallel BC$ és $C'B \parallel DC$. Másrészt feltevésünk folytán $BC \perp AD$ és $DC \perp AB$ ezért $C'D \perp AD$ és $C'B \perp AB$, vagyis az ADC' és ABC' háromszögek derékszögűek, közös átfogójuk AC'. Ennek négyzetét mindkét háromszögből kifejezve:

$$AC'^2 = C'D^2 + AD^2 = C'B^2 + AB^2,$$

és innen, $BCDC'$ szemközti oldalainak egyenlőségét felhasználva

$$BC^2 + AD^2 = DC^2 + AB^2,$$

amit bizonyítani akartunk.

Győry Kálmán (Ózd, József A. g. IV. o. t.)