I. megoldás: Könnyebb az egyenlőtlenség vizsgálata, ha egyik oldalán 0 áll, mert így tulajdonképpen előjelet vizsgálhatunk. Vonjuk ki evégett a jobb oldalból a balt. Így közös nevezőre hozás után a számlálóban két tényezős, majd kiemelésekkel négy tényezős szorzathoz jutunk, és az ismét két tényezősként írható:

$$0 < 1 - \frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2 - (xy+1)^2}{(x+y)^2} = \frac{(x+y+xy+1)(x+y-xy-1)}{(x+y)^2} =$$
$$= \frac{(x+1)(y+1)(x-1)(1-y)}{(x+y)^2} = -\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{(x+y)^2}. \tag{1}$$

Ahol a kifejezés értelmezve van, ott a nevező pozitív, ennélfogva kérdésünk úgy is kimondható, hogy a számláló a síknak mely pontjaira negatív. Vagy mivel kéttényezős szorzat akkor és csak akkor negatív, ha tényezői ellentett előjelűek, még úgy is, hogy a sík mely pontjaira ellentett jelűek x^2-1 és y^2-1.

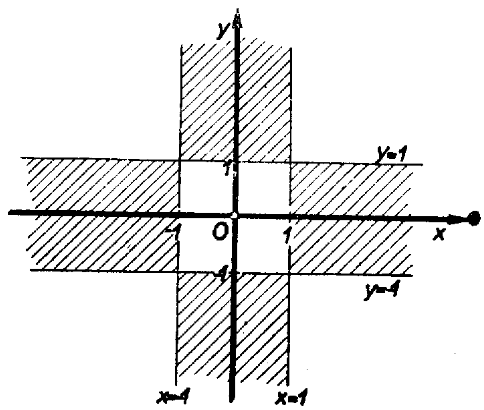
Ez kétféleképpen jöhet létre:

I. ha $x^2<1$ és ugyanakkor $y^2>1$, vagyis ha $|x|<1$ és $|y|>1$, ami részletesebben így írható: ha $-1<x<1$ és ugyanakkor vagy $y<-1$, vagy $y>1$;

II. ha $|x|>1$ és $|y|<1$, azaz ha $-1<y<1$ és ugyanakkor vagy $x>1$, vagy $x<-1$.

Átalakításaink megfordítva is alkalmazhatók, ezért az adott egyenlőtlenség mindazon pontokra és csak azokra teljesül, amelyekre az egyik koordináta abszolút értéke 1-nél kisebb, a másiké pedig 1-nél nagyobb.

E pontok áttekintése céljára a sík pontjait x^2-1 és y^2-1 előjele szerint előbb külön-külön osztályozzuk. A síkot az $y+1=0$ és $y-1=0$ egyenesekkel két félsíkra és egy síksávra osztva (1. ábra) y^2-1 az alsó és felső félsík pontjaira pozitív, a sáv pontjaira negatív és a határoló egyeneseken 0.



1. ábra

Az $x+1=0$ és $x-1=0$ egyenesek révén x^2-1 előjele szerint hasonlóan osztályozhatjuk a sík pontjait. Mindkét osztályozást egyszerre tekintve a sík $3\cdot 3=9$ részre esik szét: 4 síknegyedre (derékszögű szögtartományra), 1 négyzetre és 4 fél síksávra. A negyedek pontjaiban és a négyzetben x^2-1 és y^2-1 egyenlő előjelűek, itt (1) nem teljesül, a félsávokban ellentettek, itt teljesül az adott egyenlőtlenség (csíkozás). A félsíksávokhoz a határoló szakasz és a két-két félegyenes nem tartozik hozzá.

Krokovai Gizella (Nyíregyháza, Zrínyi Ilona lg. III. o. t.)

II. megoldás: Térjünk át az adott egyenlőtlenségről mindjárt az első lépésben egyenlőtlenségpárra:

$$-1 < \frac{xy+1}{x+y} < 1. \tag{2}$$

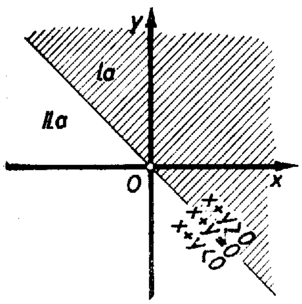
Innen a nevező eltávolítása, az $(x+y)$-nal való szorzás csak úgy lehetséges, ha a kétféle előjeli lehetőségével adódó eseteket különválasztjuk. Így (2) egyenértékű az alábbi két egyenlőtlenségrendszerrel:

(Ia)	$x+y>0,$	(IIa)	$x+y<0,$
(Ib)	$-x-y<xy+1<x+y;$	(IIb)	$-x-y>xy+1>x+y.$

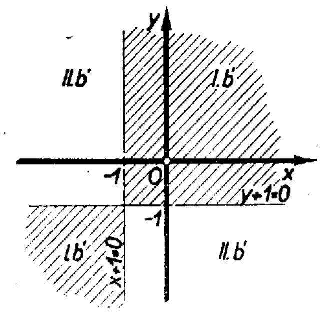
Az (Ib) és (IIb) egyenlőtlenségpárokból 0-ra redukálással két-két egyenlőtlenséget kapunk, és ezek mindegyikében ismét szorzatokat alakíthatunk ki:

(Ib′)	$(x+1)(y+1)>0,$	(IIb′)	$(x+1)(y+1)<0,$
(Ib″)	$(x-1)(y-1)<0,$	(IIb″)	$(x-1)(y-1)>0.$

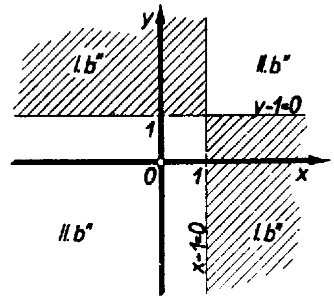
Az (Ia) és (IIa), az (Ib′) és (IIb′), az (Ib″) és (IIb″) egyenlőtlenségek egymástól csak a közbülső jelben különböznek, így a nekik eleget tevő pontokkal kitöltött síkrészeket egy-egy ábrán szétválasztva tüntethetjük fel ($2a$, $2b'$ és $2b''$ ábra).



2a. ábra



2b'. ábra



2b''. ábra

Pl. a $2b'$ ábrán az $y+1=0$ és az $x+1=0$ egyenesekkel való szétvágás révén előállt négy síkrész közül a jobb felsőnek és a bal alsónak belső pontjaira (Ib′) teljesül, a másik kettőéire (IIb′) (az egyenesek pontjai egyik síkrészhez sem tartoznak hozzá).

Az I. rendszer mindhárom egyenlőtlenségének eleget tevő pontokat az ábrák összemásolásával a 3-szor csíkozott síkrészekben kaphatjuk: az X és Y tengely pozitív oldala körüli fél-síksávokban, a II. rendszer pedig az 1. ábra másik két sávjához vezet.

Pődör Bálint (Bp. II., Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: 1. megoldásunk azoknak a pontoknak a fekvését is megadta, amelyekre a feladatnak a koordinátákból képezett kifejezése 1-gyel egyenlő ill. 1-nél nagyobb.