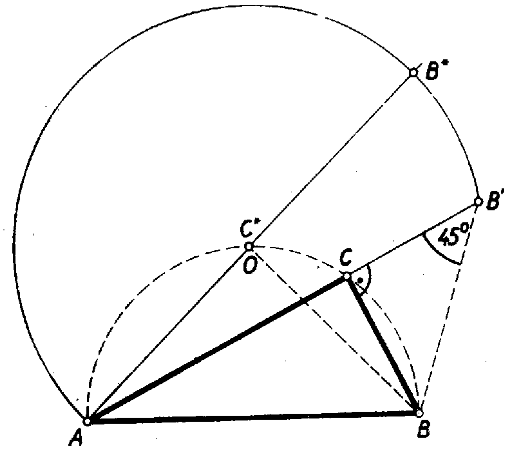
**I. megoldás:** Kérdésünk így is fogalmazható: a szóbanforgó háromszögek melyikében maximális a két befogó összege? Ezen összeg előállítása végett mérjük rá egy az állandó $AB$ átfogón álló tetszés szerinti $ABC$ derékszögű háromszög $AC$ befogójának $C$-n túl való meghosszabbítására a $CB$-vel egyenlő $CB'$ szakaszt és vizsgáljuk $AB' = AC + CB$ változását (1. ábra).




*1. ábra*

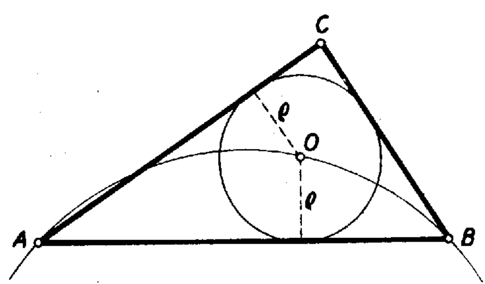
Az egyenlő szárú derékszögű $CBB'$ háromszög révén $AB'B\sphericalangle = 45°$, eszerint $B'$ rajta van $AB$-nek $45°$ nyílású látószögkörívén. E körív $O$ középpontjából $AB$ látószöge $2 \cdot 45° = 90°$, eszerint $O$ az $AB$ átmérőjű Thales-félkörnek az $AB$ felező merőlegesével való metszéspontja. $AB'$ a látószögkörív egy részének húrja, ennélfogva akkor maximális, ha $B'$ az $A$-nak a körívbeli átellenes pontjába, $B^*$-ba esik, vagyis $AB^*$ átmegy $O$-n. Ekkor a megfelelő $C^*$ a $B$-ből $AB^*$-ra bocsátott merőleges talppontjába, $O$-ba esik, és így a keresett maximális kerületű háromszög az $ABO$ egyenlő szárú derékszögű háromszög.

*Beke Géza* (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

*Megjegyzés:* Hasonlóan látható be, hogy az adott alappal és ezzel szemben tetszés szerinti adott szöggel bíró háromszögek közül is az egyenlő szárúnak van maximális kerülete.

**II. megoldás:** Ismert összefüggés szerint derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel: $a + b = c + 2\varrho$, ahol $\varrho$ a beírt kör sugara. Így $a + b + c = 2c + 2\varrho$ ugyanakkor maximális, mint ez a sugár.

Másrészt tudjuk (I. gimn. tankönyv), hogy a beírt kör $O$ középpontja azon a köríven van, amelynek pontjaiból az $AB$ szakasz látószöge $135°$ (2. ábra).




*2. ábra*

Nyilván akkor legnagyobb $\varrho$, ha $O$ ezen körív felezőpontjában, $AB$ felezőmerőlegesén van; ekkor pedig szimmetria folytán a háromszög egyenlő szárú.

*Gaál Sándor* (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)

**III. megoldás:** $a + b + c$ akkor maximális, amikor $a + b$; ez akkor, amikor $(a + b)^2$; ez – az

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = c^2 + 4t = c^2 + 2cm_c$$

átalakítás alapján – akkor, amikor $ab$, ill. $t$, $cm_c$ ill. $m_c$ maximális. Már most $m_c$ legnagyobb értéke a Thales félkörben $\frac{c}{2}$ és evvel a háromszög egyenlő szárú, a kerülete $c\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

*Máthé Csaba* (Győr, Révay M. g. II. o. t.)

**IV. megoldás:** A III. megoldáshoz kapcsolódva $ab$-re a következő egyenlőtlenség áll:

$$ab = \sqrt{a^2 b^2} \leqq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{c^2}{2};$$

$ab$ fel is veszi a legnagyobb értéket, és $ab=\dfrac{c^2}{2}$-ből $a=b$.

*Nagy Balázs* (Eger, Dobó I. g. IV. o. t.)

**V. megoldás:** Az $y=a+b+c=c(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$ függvénynek ugyanott van maximuma, ahol a $z=\sin\alpha+\cos\alpha$-nak, ill. – mivel itt $0^\circ<\alpha<90^\circ$ folytán mindkét tag pozitív – ahol $v=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$-nak. Ez $2\alpha=90^\circ$-nál következik be, akkor pedig $\alpha=45^\circ=\beta$.

*Ducza Lajos* (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

**VI. megoldás:** Az előbbi $z$ függvény maximumát így is megkaphatjuk:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=2\sin\frac{\alpha+90^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-(90^\circ-\alpha)}{2}=\sqrt{2}\cos(\alpha-45^\circ)$$

maximális, ha $\cos(\alpha-45^\circ)=1$, $\alpha-45^\circ=0^\circ$, $\alpha=45^\circ=\beta$.

*Tusnády László* (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. IV. o. t.)