I. megoldás: Alkalmazzuk az 1, 2, ..., n természetes számokra a számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\ldots n} \leqq \frac{1+2+\ldots+n}{n}. \tag{1}$$

Észrevesszük, hogy a gyökjel alatt $n!$ áll; a számlálót a számtani sor összegképlete alapján átalakítjuk:

$$\sqrt[n]{n!} \leqq \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Mindkét oldal pozitív, ezért n-edik hatványra emelve a két oldal nagyságviszonya változatlan marad:

$$n! \leqq \frac{(n+1)^n}{2^n},$$

innen

$$2^n\cdot n! \leqq (n+1)^n, \tag{2}$$

és ez a bizonyítandó állítástól csak abban különbözik, hogy a kétoldali számok egyenlőségét is megengedi. Valóban (1)-ben és így (2)-ben is állhat egyenlőség is, éspedig $n=1$ mellett.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítást a teljes indukció módszerével is végezhetjük. $n=1$-re a két oldal között egyenlőség áll; $n=2$-re teljesül az állítás, ugyanis

$$2^2\cdot 2! = 8 < (2+1)^2 = 9.$$

Tegyük fel, hogy n helyén valamely $k-1\geqq 2$-vel igaz az állítás, vagyis

$$2^{k-1}(k-1)! < k^{k-1}. \tag{3}$$

Bebizonyítjuk, hogy n helyén az 1-gyel nagyobb k-ra is igaz. Éspedig úgy, hogy egyrészt a (3)-ból $2k>0$-val való szorzás útján előálló

$$2^k k! > 2k^k \tag{4}$$

jobb oldala, másrészt az igazolandó egyenlőtlenség (n helyén k-val) jobb oldala között áll:

$$2k^k < (k+1)^k. \tag{5}$$

Ugyanis a binomiális képlet szerint

$$\frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1^k + k\cdot 1^{k-1}\cdot\frac{1}{k} + K = 2+K > 2, \tag{6}$$

mert itt K az $\frac{1}{k}$-nak k-adfokú, csupa pozitív tagokból, szám szerint $(k+1)-2=k-1\geqq 2$ tagból álló polinomja, vagyis pozitív szám, – és (6)-ból, csak a szélső tagokat tekintve átszorzással (5) adódik. Most már (4) és (5) egybekapcsolásával

$$2^k\cdot k! < 2k^k < (k+1)^k,$$

amit bizonyítani akartunk.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)