I. megoldás: Megmutatjuk, hogy létezik olyan n tagú, $d=2$ különbségű számtani sorozat, melynek kezdő tagja $a_1=2k+1$ alakú páratlan szám és amelynek összege n^p. E sorozat utolsó tagja

$$a_n=2k+1+2(n-1)=2(k+n)-1,$$

ennélfogva azt kell belátnunk, hogy van olyan egész k, amelyre:

$$n^p=\frac{n}{2}\big(2k+1+2(k+n)-1\big)=n(2k+n).$$

Valóban, innen

$$k=\frac{n(n^{p-2}-1)}{2},$$

és itt a számláló páros, mert vagy n osztható 2-vel, vagy a zárójelbeli különbség (ugyanis az utóbbi – páratlan n esetén – két páratlan szám különbsége), tehát k-ra mindenképpen egész számot kapunk.

Marton Katalin (Bp. VI., Varga Katalin gyak. lg. II. o. t.)

II. megoldás: Írjuk n^p-t n *egyenlő* tag összegeként:

$$n^p=n\cdot n^{p-1}=n^{p-1}+n^{p-1}+\ldots+n^{p-1}. \tag{1}$$

Megmutatjuk, hogy itt a szimmetrikus helyzetű tagokból (első és utolsó, második és utolsó előtti stb.) párokat alkotva és a párok egyik tagját alkalmas számmal csökkentve, a másikat ugyanannyival növelve (ami által összegük értéke nyilván nem változik) lehet az összeget úgy alakítani, hogy tagjai egymásutáni páratlan számok legyenek.

Mivel n-nek páros vagy páratlan volta szerint az említett tagpárok megalkotásának utolsó lépése máshogyan alakul, azért e két lehetőséget külön vizsgáljuk.

a) Ha n páros, akkor minden tagnak van párja, és összegünk tagjai is párosak, mert $p-1\geqq 1$. Csökkentsük, ill. növeljük az (1) összeg középső párjának tagjait, vagyis az $\frac{n}{2}$ és az $\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}$ sorszámú tagot 1-gyel, így $n^{p-1}-1$ és $n^{p-1}+1$ egymásután következő páratlan számok. Hasonlóan az $\frac{n}{2}-1$ és az $\frac{n+2}{2}+1$ sorszámú tagot a következő páratlan számmal: 3-mal, azaz $2\cdot1+1$-gyel csökkentsük ill. növeljük; az $\frac{n}{2}-2$-ediket és az $\frac{n+2}{2}+2$-ediket, a páratlan számok sorozatában következő 5-tel, azaz $2\cdot2+1$-gyel s i. t., végül az $\frac{n}{2}-\left(\frac{n}{2}-1\right)=1$ és az $\frac{n+2}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)=n$ sorszámú tagot (a két szélső tagot) $2\left(\frac{n}{2}-1\right)+1=n-1$-gyel. Az így átalakított, növekedő tagokból álló

$$\begin{aligned}n^p=&\big(n^{p-1}-n+1\big)+\big(n^{p-1}-n+3\big)+\ldots+\big(n^{p-1}-3\big)+\big(n^{p-1}-1\big)+\\&+\big(n^{p-1}+1\big)+\big(n^{p-1}+3\big)+\ldots+\big(n^{p-1}+n-3\big)+\big(n^{p-1}+n-1\big)\end{aligned}$$

összeg minden tagja páratlan, bármely két egymásutáni tagjának különbsége 2, és tagjainak száma:

$$1+\frac{(n^p+n-1)-(n^p-n+1)}{2}=n.$$

b) Ha n páratlan, akkor (1) középső tagjának nem jut pár, a párok száma $\frac{n-1}{2}$, a középső tag sorszáma $\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$ a vele szomszédosaké pedig $\frac{n-1}{2}$, ill. $\frac{n+3}{2}$. Most minden tagja páratlan az összegnek, ezért középről kifelé haladva egymás után 2-vel, 4-gyel, $\ldots,2\frac{n-1}{2}=n-1$-gyel csökkentjük, ill. növeljük a párok tagjait és így

$$\begin{aligned}n^p=&\big(n^{p-1}-n+1\big)+\big(n^{p-1}-n+3\big)+\ldots+\big(n^{p-1}-4\big)+\big(n^{p-1}-2\big)+\\&+n^{p-1}+\big(n^{p-1}+2\big)+\big(n^{p-1}+4\big)+\ldots+\big(n^{p-1}+n-3\big)+\big(n^{p-1}+n-1\big).\end{aligned}$$

Az *a)* eset mintájára könnyű belátni, hogy ez a felbontás is megfelel mindegyik követelménynek.

Komlóssy György (Szolnok, Verseghy F. g. II. o. t.)