I. megoldás. Kössük össze a tetraéder beírt gömbjének O középpontját a csúcsokkal, így négy új tetraéder keletkezik: $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$ és $OABC$. Minthogy O biztosan belső pontja a tetraédernek, azért az OAB, OAC, OAD, OBC, OBD és OCD háromszöglapok mentén való bevágással a tetraéder (mint tömör test) a négy új tetraéderre esik szét, és így K köbtartalma e részek köbtartalmának összege. Kézenfekvő erre a célra a részek köbtartalmát úgy kifejezni, hogy alapnak mindig az O-val szemben fekvő lapot vesszük; egyrészt, mert ezek az eredeti tetraéderrel közösek, másrészt mert így a magasság mindnégy résztestben ugyanaz, éspedig ϱ. Így, az A, B, C, ill. D csúccsal szemben fekvő lapok területét t_1, t_2, t_3, ill. t_4-gyel jelölve

$$K=\frac{t_1\varrho}{3}+\frac{t_2\varrho}{3}+\frac{t_3\varrho}{3}+\frac{t_4\varrho}{3}.$$

Fejezzük ki innen ϱ reciprokát

(1)
$$\frac{1}{\varrho}=\frac{t_1}{3K}+\frac{t_2}{3K}+\frac{t_3}{3K}+\frac{t_4}{3K}.$$

A jobboldali hányadosokat a (felbontatlan) tetraéder köbtartalmának képlete alapján is kifejezhetjük a megfelelő magasságvonalak hosszával:

(2)
$$K=\frac{t_i m_i}{3}\text{-ból}\qquad \frac{t_i}{3K}=\frac{1}{m_i},\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Ezeket (1)-be behelyettesítve a *b)* összefüggést kapjuk.

A *c)* összefüggés igazolása céljára kössük össze A, B, C, D-t a BCD lapot kívülről érintő gömb O_1 középpontjával. Így ismét négy újabb tetraéderhez jutunk, ezekben O_1 közös csúcs, O_1-gyel szemközt mindegyikben az eredeti tetraédernek egy lapja fekszik, és az O_1-ből kiinduló magasságvonal hossza mindegyikben ϱ_1. Mivel O_1 a BCD lapnak az A-val ellentétes oldalán van, a többi három lapnak viszont ugyanazon az oldalán, mint az eredeti tetraéder megfelelő szemközti csúcsa, azért az O_1BCD és az $ABCD$ tetraéderek együtt ugyanazt a teret töltik ki, mint a további bárom új tetraéder együtt. Ennek alapján az előzőkhöz hasonlóan:

$$K=\frac{t_2\varrho_1}{3}+\frac{t_3\varrho_1}{3}+\frac{t_4\varrho_1}{3}-\frac{t_1\varrho_1}{3},$$

majd ϱ_1 reciprokát kifejezve:

$$\frac{1}{\varrho_1}=-\frac{t_1}{3K}+\frac{t_2}{3K}+\frac{t_3}{3K}+\frac{t_4}{3K},$$

és innen a (2) kifejezések helyettesítésével *c)* adódik.

A *c)*-hez hasonló további három összefüggés a következő

(3)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_2}&=\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4},\\ \frac{1}{\varrho_3}&=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4},\\ \frac{1}{\varrho_4}&=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m_4}.\end{aligned}$$

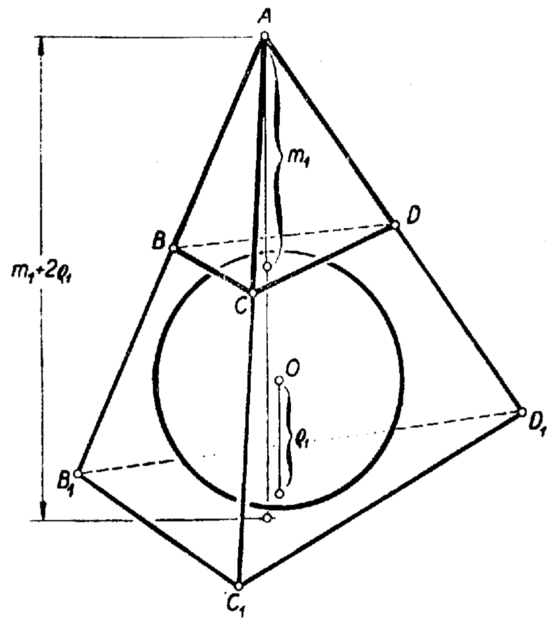
Ezeket *c)*-vel összeadva, majd *b)* figyelembevételével

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}+\frac{1}{\varrho_4}=2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}\right)=\frac{2}{\varrho},$$

és evvel az *a)* összefüggést is igazoltuk.

Szodoray Erzsébet (Debrecen, Kossuth L. lg. IV. o. t.)

II. megoldás: A *c)* összefüggést így is igazolhatjuk: fektessünk a BCD lappal párhuzamos érintősíkot a BCD lapot kívülről érintő O közepű gömbhöz, és jelöljük e síknak az AB, AC, AD egyenesekkel való metszéspontjait sorra B_1, C_1, D_1-gyel (1. ábra).



A kapott $AB_1C_1D_1$ tetraéder nyilván hasonló az $ABCD$-hez, a $B_1C_1D_1$ lapjához tartozó magassága $m_1+2\varrho_1$, végül az O gömb ennek beírt gömbje. Mivel a megfelelő hosszanti méretek aránya a hasonlóságból következően megegyezik, így

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}=\frac{m_1+2\varrho_1}{m_1}=1+\frac{2\varrho_1}{m_1},$$

és ebből

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\varrho}-\frac{2}{m_1}.$$

Itt a jobb oldalon a b) jobb oldalának behelyettesítése és összevonás után c) jobb oldalát kapjuk.

Várallyay László (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A *b)* és *c)* összefüggés speciális esete egy a fentiekhez hasonlóan igazolható általánosabb összefüggésnek. Ismeretes, hogy ha az $ABCD$ tetraéder belsejében levő tetszőleges P pont távolsága az A, B, C, D csúcsokkal szemközti lapoktól rendre p_a, p_b, p_c, p_d, továbbá az A, B, C, D csúcsokból kiinduló magasságvonalak hossza m_a, m_b, m_c, m_d, akkor

$$\frac{p_a}{m_a}+\frac{p_b}{m_b}+\frac{p_c}{m_c}+\frac{p_d}{m_d}=1.$$

Ha viszont P a tetraéderen kívül van, akkor minden olyan laptól vett távolsága, amelynek a tetraéderrel ellentétes oldalán helyezkedik el, az egyenlőségben negatív előjellel veendő (ilyen három is lehet; lásd K. M. L., 1(1947–48), 123. oldal, 133. feladat). Az állítás könnyen bizonyítható résztetraéderekre bontással.

Írjuk fel ezt az összefüggést a beírt gömb középpontjára, majd a BCD lapot kívülről érintő gömb középpontjára. Ekkor

$$\frac{\varrho}{m_1}+\frac{\varrho}{m_2}+\frac{\varrho}{m_3}+\frac{\varrho}{m_4}=1,\quad \text{ill.}\quad -\frac{\varrho_1}{m_1}+\frac{\varrho_1}{m_2}+\frac{\varrho_1}{m_3}+\frac{\varrho_1}{m_4}=1,$$

és innen ϱ, ill. ϱ_1-gyel való osztással *b)* ill. *c)* adódik.

Bärnkopf Rudolf (Bp. IX., József A. gépip. t. III. o. t.)