I. megoldás: Adjuk hozzá a D_n determináns első sorát a második sorához, majd az így keletkezett második sor 1/2-szeresét a harmadik sorhoz, az így keletkezett harmadik sor 1/3-szorosát a negyedik sorhoz s i. t. Így D_n-nel egyenlő értékű olyan determinánst kapunk, amelyben a főátló alatt levő elemek mind 0-val egyenlőek, és a főátlóban a természetes számok állnak 1-től n-ig. Ámde ismeretes, hogy ha a főátló alatti (vagy feletti) elemek mind 0-val egyenlőek, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata, tehát D_n értéke valóban n!

Rátkai Zsolt (Bp. VI., Kölcsey g. III. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítást elvégezhetjük a teljes indukció módszerével is.

$n=2$ és $n=3$ esetén feladatunk állítása igaz, mert

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2=2!$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1^2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1+4+1=6=3!$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz mind az $n=k-2$, mind az $n=k-1$ esetben, vagyis $D_{k-2}=(k-2)!$ és $D_{k-1}=(k-1)!$ Bebizonyítjuk, hogy ekkor $n=k$-ra is igaz. Ugyanis, ha a k-adrendű D_k determináns k-adik oszlopát az előtte állóhoz hozzáadjuk, majd az így kapott determinánst a k-adik sora szerint kifejtjük, evvel egyetlen, $k-1$-ed rendű determinánshoz jutunk, és ha ezt $k-1$-edik oszlopa alapján két ugyancsak $k-1$-ed rendű determináns összegére bontjuk,[1] akkor az elsőben ráismerünk D_{k-1}-re, a másodiknak a $k-1$-edik oszlop szerinti, ugyancsak egytagú kifejtésében pedig D_{k-2}-re, mint tényezőre:

$$D_k=\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & (k-3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (k-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & (k-1)^2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & . & . & . \\ \dots & (k-3)^2 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & (k-2)^2 & 0 \\ \dots & -1 & 1+(k-1)^2 & (k-1)^2 \\ \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dots & . & . \\ \dots & (k-3)^2 & 0 \\ \dots & 1 & (k-2)^2+0 \\ \dots & -1 & 1+(k-1)^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & . & . \\ \dots & (k-3)^2 & 0 \\ \dots & 1 & (k-2)^2 \\ \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \dots & . & . \\ \dots & (k-3)^2 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & -1 & (k-1)^2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned} &=D_{k-1}+(k-1)^2D_{k-2}=(k-1)!+(k-1)^2(k-2)!=(k-1)!+\\ &\quad+(k-1)(k-1)!=(1+k-1)(k-1)!=k! \end{aligned}$$

ami bebizonyítandó volt.

Tóth Zsuzsanna (Makó, József A. g. IV. o. t.)

[1] Lásd K. M. L. XV. köt. 80. o. 1957 november.