Nyilván csak olyan sorozatokról lehet szó, amelyeknek bármely két tagja különböző, hiszen pl. a $k(\geqq 4)$ számú tagból álló $1, 2, 2, \ldots, 2$ sorozatra az állítás nem igaz, mert már $k=4$ esetén az $1, 2, 2, 2$ sorozat tagjainak száma nagyobb, mint a feladatban megadott $\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$ felső korlát, $k=5,\ 6,\ \ldots$ esetén pedig a tagok száma lépésről lépésre 1-gyel nő, a $\frac{k}{3}+2$ felső korlát pedig csak $\frac{1}{3}$- dal.

Osszuk a k-nál kisebb természetes számokat 3-tól kezdve három egymásutáni tagból álló csoportokba, vagyis tartozzanak egy csoportba a $3j$, $3j+1$, $3j+2$ számok, az utolsó csoport esetleg csonka. Vizsgálandó sorozatainkba minden ilyen hármas csoportból *legfeljebb* egy szám tartozhat, azaz *nem tartozhat bele kettő.* Ha ugyanis $3j$ tagja a sorozatnak, ez a sorozat első két tagjával képezett $1+3j$, ill. $2+3j$ összegek révén a csoport további két tagjának felvételét kizárja. Ha pedig $3j$ nem tartozik a sorozathoz, de $3j+1$ igen, akkor az $1+(3j+1)$ összeg miatt $3j+2$ nem vehető fel.

Már most a 3-tól $k-1$-ig terjedő egész számok $\left[\frac{k-1}{3}\right]$ hármas csoportot adnak[1]; például

$$k=15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,$$

esetén a legnagyobb, még használható szám

$$k-1=14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,$$

és a csoportok száma

$$4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6.$$

Eszerint az első két tag figyelembevételével a sorozat tagjainál n számára fennáll:

$$n \leqq 2+\left[\frac{k-1}{3}\right] \leqq \frac{k-1}{3}+2<\frac{k}{3}+2,$$

ami bebizonyítandó volt.

Gyene András (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

[1] Szögletes zárójelbe tétellel a számban foglalt legnagyobb egész számot jelöljük, azaz $[x]$ az az egész szám, amelyre $[x] \leqq x<[x]+1$; pl. $[5]=5$, $[\pi]=3$, $[-\pi]=-4$.