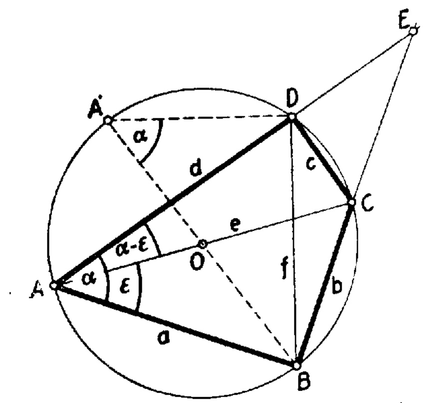
I. megoldás: Négyszögünk húrnégyszög, mert két szemben fekvő szögének összege $\beta+\delta=180^\circ$, és a keresett AC átló átmérője a körülírt körnek, mert β és δ ennek látószöge a B, D pontból. A további jelöléseket mindhárom megoldás céljára lásd az ábrán.



Az AC átlót mint az adatokkal meghatározott ABD háromszög körülírt körének átmérőjét számítjuk az $A'BD$ derékszögű háromszögből:

(1)
$$AC=2r=\frac{f}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

(Meg lehet mutatni, hogy a felhasznált összefüggés $\alpha\geqq 90^\circ$ esetén is érvényes.)

Elbert Árpád (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)

II. megoldás: Határozzuk meg először AC-nek AB-vel bezárt ε szögét. Az ABC és ACD derékszögű háromszögekből

(2)
$$AC=\frac{a}{\cos\varepsilon}=\frac{d}{\cos(\alpha-\varepsilon)}.$$

Innen a második nevezőt kifejtve rendezéssel olyan egyenletet kapunk, amelynek minden tagjában vagy $\sin\varepsilon$ vagy $\cos\varepsilon$ szerepel. Célszerű ilyenkor elsőnek tg ε-t kifejezni:

(3)
$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{d-a\cos\alpha}{a\sin\alpha}.$$

Ebből a (2)-beli első kifejezés céljára:

$$\frac{1}{\cos\varepsilon}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\varepsilon+1}=\frac{\sqrt{(d-a\cos\alpha)^2+a^2\sin^2\alpha}}{a\sin\alpha}.$$

(A négyzetgyök pozitívnak veendő, mert ε biztosan pozitív hegyesszög.) Ezt átalakítva, majd (2)-be beírva ismét (1)-re jutunk.

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

III. megoldás: Négyszögünkre érvényes Ptolemaios tétele:

$$ac+bd=ef.$$

Itt a c és b oldalakat Pythagoras tétele alapján e, a, d-vel kifejezve e-re ezt az egyenletet kapjuk:

$$a\sqrt{e^2-d^2}+d\sqrt{e^2-a^2}=ef.$$

Az innen négyzetreemeléssel, rendezéssel és újabb négyzetreemeléssel adódó egyenlet egyetlen pozitív gyöke:

$$e=\frac{2adf}{\sqrt{4a^2d^2-\left(f^2-a^2-d^2\right)^2}},$$

és ez f-nek már használt kifejezése alapján ismét (1)-re vezet.

Tamás Gyula (Ózd, József Attila g. III. o. t.)

Megjegyzések: Minthogy nyilván konvex négyszögről van szó, azért az ABD és CBD háromszögek csak A- vagy C-nél lehetnek tompaszögűek. Eszerint a megoldhatóság két feltétele:

$$a\cos a < d \quad \text{és} \quad d\cos\alpha < a.$$

Az első feltétel teljesülésével a II. megoldás (3) részeredménye is pozitív lesz, és ugyanez áll a másodiknak a teljesülésével a (3)-ből a és d szerepének felcserélésével adódó

$$\text{(3')} \qquad \operatorname{tg}\,(\alpha-\varepsilon)=\frac{a-d\cos\alpha}{d\sin\alpha}$$

kifejezésre.

$\alpha \neq 90^\circ$ esetén négyszögünk bármelyik szemközti oldalpár meghosszabbítása azaz egy (kisebb) derékszögű háromszög hozzácsatolása révén derékszögű háromszöggé egészíthető ki. Ennek E „új” csúcsánál levő szög $90^\circ-\alpha$, ill. $\alpha-90^\circ$ aszerint, hogy α hegyes, ill. tompa szög. Már most egymásután kifejezve az AE átfogót, kivonással, ill. összeadással a BE vagy DE befogót, végül a CE átfogót, AC az ACE háromszögből számítható. – Az $\alpha=90^\circ$ esetben pedig téglalap-számítássá egyszerűsödik a feladat.

Elbert Árpád koordinátageometriai megoldást is küldött be.