Legyen az egyenlet három gyöke x_1, x_2, x_3. A gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$x_1+x_2+x_3=0, \tag{1}$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p, \tag{2}$$
$$x_1x_2x_3=-q. \tag{3}$$

Ha x_1 és x_2 egymás reciprokai, akkor $x_1x_2=1$, s így a (3) egyenletből:

$$x_3=-q.$$

Ebből (1) alapján

$$x_1+x_2=q.$$

A nyert összefüggéseket (2)-be helyettesítve:

$$p=x_1x_2+x_3(x_1+x_2)=1-q^2.$$

A feladat első részét meg is oldottuk: a szóbanforgó harmadfokú egyenletnek

$$x^3+\left(1-q^2\right)x+q=0 \tag{4}$$

alakúnak kell lenni ahhoz, hogy az egyenlet két gyöke egymásnak reciprok értéke lehessen. Hátra van még a gyökök meghatározása.

Az egyenlet egyik gyökének értékét már ismerjük:

$$x_3=-q.$$

Mivel a másik két gyökre fennáll az

$$x_1x_2=1$$

és az

$$x_1+x_2=q$$

összefüggés, ez a két gyök gyöke az

$$x^2-qx+1=0$$

másodfokú egyenletnek. Az egyenlet megoldásával

$$x_1=\frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}, \qquad x^2=\frac{q-\sqrt{q^2-4}}{2}.$$

Ha $q^2\geq 4$, akkor tehát a harmadfokú egyenletnek három valós gyöke van, ha $q^2=4$, kettő ezek közül egyenlő, ha pedig $q^2<4$, akkor az egyenletnek csak egy valós megoldása van.

Megjegyzés: Az x_1-et és x_2-t meghatározó egyenlethez úgy is eljuthatunk, ha a (4) harmadfokú egyenletet elosztjuk az x_3-hoz tartozó $(x+q)$ gyöktényezővel.

Bognár László (Veszprém, Lovassy g. III. o. t.)