A feladatban szereplő első egyenlet értelmetlen akkor, ha valamelyik nevező 0, tehát ha

$$\sin x + \cos x = 0,$$

azaz

$$x_1 = 135° \pm n \cdot 360°,$$
$$x_2 = 315° \pm n \cdot 360°;$$

a második nevezőből ugyanígy akkor, ha

$$y_1 = 135° \pm n \cdot 360°, \qquad y_2 = 315° \pm n \cdot 360°.$$

A két szög összegére vonatkozó összefüggések alapján a harmadik nevező az első két nevező szorzatára bontható:

$$\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y),$$

így ez ugyanakkor 0, mikor az első kettő.

Az említett gyököket kizárva, az egyenletet végigszorozhatjuk a nevezők legkisebb közös többszörösével:

$$(\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 y - \cos^2 y = 1.$$

$\sin^2 y$ helyébe $1 - \cos^2 y$-t írva:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 2\cos^2 y = 0. \tag{1}$$

Vonjuk ki ezt az egyenletet az egyenletrendszer második egyenletéből:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Bontsuk tagokra a baloldalt. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $2\sin x \cos x = \sin 2x$ összefüggések felhasználásával a következő egyenletet kapjuk:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből

$$2x_1 = \ \ 60° \pm n \cdot 360°, \quad \text{azaz} \quad x_1 = 30° \pm n \cdot 180°,$$
$$2x_2 = 120° \pm n \cdot 360°, \quad \text{azaz} \quad x_2 = 60° \pm n \cdot 180°$$

$(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

y-t legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, ha (1) kétszeresét levonjuk az egyenletrendszer második egyenletéből. Így a következő egyenlethez jutunk:

$$2\cos^2 y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1,$$

$$\cos y = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}.$$

Mivel $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ és 360° többszöröseitől eltekintve

$$\cos 30° = \cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ezért $\qquad 2y_1 = \ \ 30° \pm n \cdot 360°$

és $\qquad 2y_2 = 330° \pm n \cdot 360°,$

azaz $\qquad y_1 = \ \ 15° \pm n \cdot 180°,$

$\qquad y_2 = 165° \pm n \cdot 180°.$

A kizárt gyökök egyikét sem kaptuk megoldásnak. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a kapott gyökök valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere g. I. o. t.)