I. megoldás: *a)* Alkalmazzuk a

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\text{ összefüggést az }\alpha=3x\text{ és }\beta=x$$

szögekre:

$$\sin 3x+\sin x=2\sin 2x\cos x,$$

s így az *a)* egyenlet a következő alakra hozható:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x+\sin 2x=\sin 2x(2\cos x+1)=0.$$

Ebből vagy $\sin 2x=0,$

$2x=\pm k\cdot 180^\circ \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$

azaz $x=\pm k\cdot 90^\circ,$

vagy $2\cos x+1=0,$

$\cos x=-\dfrac{1}{2},$

s ekkor $x=120^\circ\pm n\cdot 360^\circ,$

illetve $x=240^\circ\pm n\cdot 360^\circ. \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$

Ezzel megtaláltuk az egyenlet összes gyökeit.

A *b)* esetben alkalmazzuk a

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggést a $3x$ és x szögekre. Így az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\cos 2x+2\cos 2x\cos x=\cos 2x(1+2\cos x)=0.$$

Ez úgy állhat fenn, ha vagy az első, vagy a második tényező 0. Első esetben

$2x=90^\circ\pm n\cdot 180^\circ,$

azaz $x=45^\circ\pm n\cdot 90^\circ \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$

második esetben $x=120^\circ\pm n\cdot 360^\circ$

vagy $x=240^\circ\pm n\cdot 360^\circ \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$

Máthé Csaba (Győr, Révai g. II. o. t.)

II. megoldás: Arra kell törekednünk, hogy az egyenletben csak egyetlen szög szögfüggvénye szerepeljen. Ismeretes, hogy

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

$\sin 3x$ értékét x szögfüggvényével kiszámíthatjuk:

$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=2\sin x\cos^2 x+$$
$$+\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin x\left(4\cos^2 x-1\right).$$

Ezeket az értékeket az *a)* egyenletbe helyettesítve:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin x\left(1+2\cos x+4\cos^2 x-1\right)=$$
$$=2\sin x\cos x(1+2\cos x)=\sin 2x(1+2\cos x)=0.$$

Látható, hogy ugyanarra az egyenletre jutottunk, mint az I. megoldásban, ugyanazokat a gyököket kapjuk, mint ott.

b) A

$$\cos 2x=1-2\ \sin^2 x$$

és a

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\left(1-2\sin^2 x\right)\cos x-2\sin^2 x\cos x$$

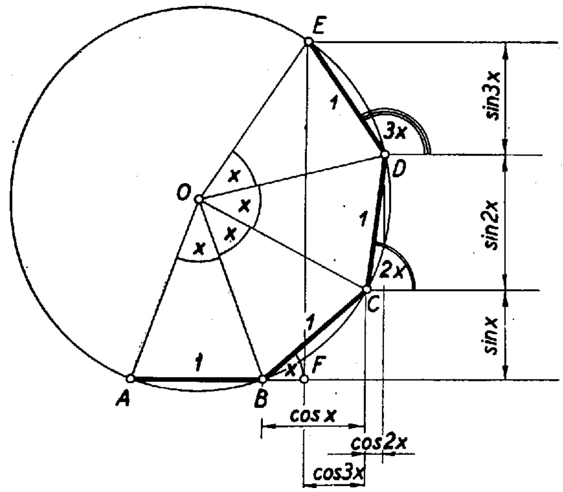
értékek behelyettesítésével egyenletünk a következőképpen alakul:

$$\cos x+\cos^2 x+\cos 3x=\left(1-2\sin^2 x\right)(1+\cos x)+\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)=$$
$$=\left(1-2\sin^2 x\right)(1+2\cos x)=\cos 2x(1+2\cos x)=0.$$

Az egyenlet egyezik az I. megoldásban kapott egyenlettel, ebből a gyököket ugyanúgy számíthatjuk ki, mint ott.

Hajna János (Pécs, Széchenyi g. II. o. t.)

III. megoldás: Az OA sugarú körben az OA szárból kiindulva mérjünk fel egymás után négyszer x középponti szöget, így kapjuk a körön az A, B, C, D, E pontokat (l. az ábrát).



Válasszuk egységnek az $AB=BC=CD=DE$ húrok hosszát. Ez megtehető, ha $x\neq n\cdot 360°(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, ezeket az x értékeket egyenlőre zárjuk ki.

Az AB és BC egyenesek egymással bezárt egyik szöge x lesz (mert ha például az OAB és OBC egyenlő szárú háromszögek szögfelezőit az O csúcsból meghúzzuk, ezek szöge x lesz; a szögfelezők szögére merőleges szárú, említett szög szintén ugyanennyi). Ugyanígy a C pontban $2x$, a D pontban pedig $3x$ nagyságú szög keletkezik.

Mivel a húrok egységnyi hosszúságúak, azért a $\sin x$, $\sin 2x$ és $\sin 3x$ értékek az AB-re állított EF merőlegesen közvetlenül leolvashatóak, mégpedig könnyen ellenőrizhető, hogy (x értékétől függően) mindjárt előjelesen: ha valamelyik sinus negatív, értékét E-től lefelé kell mérnünk.

Így az EF szakasz hossza $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$. Ha tehát az *a)* egyenletet meg akarjuk oldani, azt kell csak vizsgálnunk, milyen x értékre lesz EF hossza nulla. Ez akkor következik be, ha $E\equiv A$ vagy $E\equiv B$.

Első esetben $\quad 4x_1=\pm n\cdot 360°,$

azaz $\quad x_1=\pm n\cdot 90°,$

második esetben $\quad 3x_2=360°\pm n\cdot 360°,$

vagyis $\quad x_2=120°\pm n\cdot 120°.$

A feladat elején kizártuk az $x=\pm n\cdot 360°$ szöget. Mivel azonban az *a)* egyenletnek ez nyilvánvalóan megoldása, a kapott két gyökcsoportban nem kell kizárnunk a $360°$ többszöröseit szolgáltató n-eket, vagyis x_1-nél is, x_2-nél is

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

– Ugyanígy belátható, hogy az AB meghosszabbításán a $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$ értékeket kapjuk meg egymásután mérve előjelük szerint, s így

$$BF=\cos x+\cos 2x+\cos 3x.$$

A *b)* egyenlet olyan x-ekre teljesül, melyeknél $B\equiv F$. Ez akkor következik be, ha E a B ponttal esik össze, vagy ha a B-ben állított merőlegesnek a körrel való másik metszéspontjában van.

Első esetben $\quad 3x_1=\pm n\cdot 360°,$

tehát $\quad x_1=\pm n\cdot 120°,$

második esetben $\quad 4x_2=180°\pm n\cdot 360°,$

$$x_2=45°\pm n\cdot 90°.$$

Mivel $x=\pm n.\ 360°$ most nem megoldása a feladatnak, ki kell zárnunk az ilyen értékeket szolgáltató n-eket. Csak az első esetben kaphatnánk $360°$ többszörösét, így x_1-nél n a 3-mal nem osztható, nem negatív egészeken fut végig, x_2 esetében azonban tetszőleges nem negatív egész lehet.

– Összehasonlítással meggyőződhetünk róla, hogy ugyanazokat a gyököket kaptuk meg (rövidebb formába foglalva), mint az előző megoldásoknál.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A III. megoldásban követett gondolatmenet alapján megoldhatjuk a

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx = 0,$$
$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos kx = 0$$

egyenleteket is, ahol k tetszőleges pozitív egész.