**I. megoldás**: A feladat kikötéseinek eleget tevő $n$-edrendű determináns alakja a következő:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & . & . & . & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & 4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & . & \mathrm{n} \end{vmatrix}.$$

A determináns értéke nem változik, ha a determináns egyik sorához hozzáadjuk egy másik sorát vagy annak többszörösét. (KML XV. köt. 81. old. 11. tétel.) Adjuk hozzá tehát az utolsó előtti sor $(-1)$-szeresét az utolsó sorhoz, azután az $n-2$-edik sor $(-1)$-szeresét az utolsó előttihez, és így folytatva végül az első sor $(-1)$-szeresét a másodikhoz. Ekkor a determináns a következő alakot ölti:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ha egy determináns főátlója alatt (vagy felett) csupa nulla áll, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzatával egyenlő (idézett hely 8. tétel).

Ezért

$$D = 1^n = 1$$

*S. Nagy Erzsébet* (Makó, József A. g. III. o. t.)

**II. megoldás:** A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el.

$n = 2$-re az állítás helyességét közvetlenül beláthatjuk.

Tegyük fel, hogy az állítás $n = k$-ra igaz, azaz fennáll, hogy

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 2 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & . & 3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & . & k \end{vmatrix} = 1.$$

A feltételt felhasználva bebizonyítjuk, hogy ekkor $D_{k+1} = 1$ is fennáll.

A

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 2 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & . & 3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & . & (k+1) \end{vmatrix}$$

determináns első oszlopát rendre a második, harmadik, $\ldots, (k+1)$-ik oszlopból kivonva, majd a kapott determinánst első sora szerint kifejtve nyerjük:

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 2 & . & . & . & . & 2 \\ 1 & 1 & 2 & . & . & . & . & 3 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 2 & . & . & . & . & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 2 & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & . & . & . & \mathrm{k} \end{vmatrix} = 1 \cdot D_k = 1.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

*Bognár László* (Veszprém, Lovassy g. III. o. t.)