**I. megoldás:** Fejtsünk ki egy tetszőleges harmadrendű determinánst.

(1)
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A determináns minden eleme két tagban, egy pozitív és egy negatív előjellel írt tagban szerepel. A negatív előjelű tagok értéke csak akkor pozitív, ha bennük egy vagy három determináns elem negatív. Az utolsó három tag tehát pozitív, ha a determináns elemek közül *páratlan* számú negatív, a többi pozitív. – Viszont így az első három tagból legalább 1 negatív értékű, mert ha mindegyikben páros számú negatív elem volna, akkor a determináns negatív elemeinek száma is páros lenne.

Ezzel igazoltuk állításunkat: a harmadrendű determináns elemeinek előjelét nem lehet úgy megválasztani, hogy a kifejtés minden tagja pozitív legyen.

*Lőrinczy László* (Szolnok, Verseghy g. IV. o. t.)

**II. megoldás:** Mivel olyan determinánst kell keresnünk, melynek minden kifejtési tagja pozitív, elég csak olyan determinánssal foglalkozni, amelynek egyik eleme sem 0.

Tekintsük a determinánsnak az I. megoldásban kifejtett alakját és képezzük a hat kifejtési tag szorzatát:

$$-a_{11}^2a_{12}^2a_{13}^2a_{21}^2a_{22}^2a_{23}^2a_{31}^2a_{32}^2a_{33}^2.$$

Bárhogyan választjuk is meg az elemek előjelét, az előbbi szorzat negatív értéket ad. De ez azt mutatja, hogy az összeszorzott hat tag között volt – mégpedig páratlan számú – negatív előjelű, s így legalább egy tag pozitív közülük.

*Megjegyzések:* 1. A bizonyított tételből az is következik, hogy a harmadrendű determináns elemeinek előjele nem választható meg úgy sem, hogy minden kifejtési tag negatív legyen. Hiszen ha ez lehetséges volna, akkor abban a determinánsban, melyben minden tag előjelét ellenkezőre változtatjuk, az összes kifejtési tagok pozitívak volnának.

2. Felmerül a kérdés, vajon csak a harmadrendű determináns esetében igaz-e az állítás, vagy általánosítható-e nem harmadrendű determinánsokra is?

Másodrendű determináns tagjaira nem teljesül az állítás, mert pl. olyan másodrendű determinánsban, amelyben a második sor első eleme negatív, a többi mind pozitív, a kifejtés mindkét tagja pozitív lesz.

Bebizonyítjuk azonban, hogy $n\geq 3$ esetén az *$n$-edrendű determináns elemeit nem választhatjuk meg úgy, hogy a kifejtés során kapott valamennyi tag értéke pozitív (negatív) legyen.*

A bizonyítás teljes indukcióval történhet.

$n=3$ esetén az állítást már bizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz az állítás, azaz tetszőleges $k$-ad rendű determináns tagjai nem lehetnek mind pozitív vagy mind negatív előjelűek.

Fejtsünk ki egy $(k+1)$-edrendű determinánst pl. első sora szerint. A kifejtésben $k+1$ számú $k$-ad rendű determináns szerepel egy-egy szorzóval (az első sor elemeivel) megszorozva. Mivel a $k$-adrendű determinánsok tagjaiban feltétlenül vannak ellenkező előjelűek, ezek tetszőleges (nem nulla) szorzóval való megszorzás után is ellenkező előjelűek maradnak, vagyis a kifejtés minden, egy $k$-adrendű determinánsához tartozó részletében már szerepelnek ellenkező előjelű tagok. A $(k+1)$-edrendű determináns tagjai sem lehetnek tehát mind azonos előjelűek.

Ezzel a tételt bizonyítottuk.