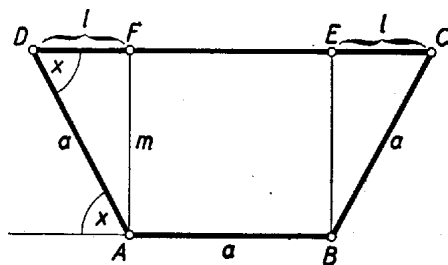


I. megoldás: Jelöljük x -szel az oldalfalnak az alapdeszkával bezárt hegyesszögét. A további jelöléseket az ábra mutatja.



Az AFD derékszögű háromszögből a trapéz magassága:

$$m = \sqrt{a^2 - l^2},$$

így a trapéz területe

$$t = \frac{a + a + 2l}{2} m = (a + l) \sqrt{a^2 - l^2}.$$

Mivel a terület mindig pozitív, t -nek (mint l függvényének) ugyanott van maximuma, ahol $3t^2$ -nek:

$$3t^2 = 3(a + l)^2 (a^2 - l^2) = (a + l)(a + l)(a + l)(3a - 3l).$$

A négy tényező összege $6a$ állandó. Így a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség alapján a szorzat akkor maximális, ha tényezői egyenlők:

$$a + l = 3a - 3l,$$

vagyis ha

$$l = \frac{a}{2}.$$

A maximális csatorna-keresztmetszetet ez már meghatározza. Számítsuk ki, hogy a lehető legnagyobb trapéz terület esetén mekkora az x szög. Az AFD derékszögű háromszögből:

$$\cos x = \frac{l}{a}.$$

Ennek értéke a maximális területű trapéz esetén $\frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$, tehát

$$x = 60^\circ.$$

A csatorna térfogata eszerint akkor lesz maximális, ha az oldalfal az alapdeszkával $x = 60^\circ$ -os hegyesszöget zár be.

Pál Gábor (Miskolc, Kohászati techn. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Lényegében ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha közvetlenül az alap és az oldallap közti x szöggel fejezzük ki a keresztmetszet területét. Ekkor

$$l = a \cos x, \quad m = a \sin x,$$

így

$$t = \frac{2a + 2l}{2} m = a^2 (1 + \cos x) \sin x.$$

Ennek ugyanott van a maximuma, mint a

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{a^2}\right)^2 &= (1 + \cos x)^2 \sin^2 x = (1 + \cos x)^2 (1 - \cos^2 x) = \\ &= (1 + \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos x)(1 - \cos x) \end{aligned}$$

függvénynek és ebből 3-mal szorozva az előző megoldáshoz hasonlóan állapítható meg a maximum.

2. A feladatot megoldhatjuk differenciálszámítással is. Az ezzel a módszerrel történő megoldásokat szintén elfogadtuk.