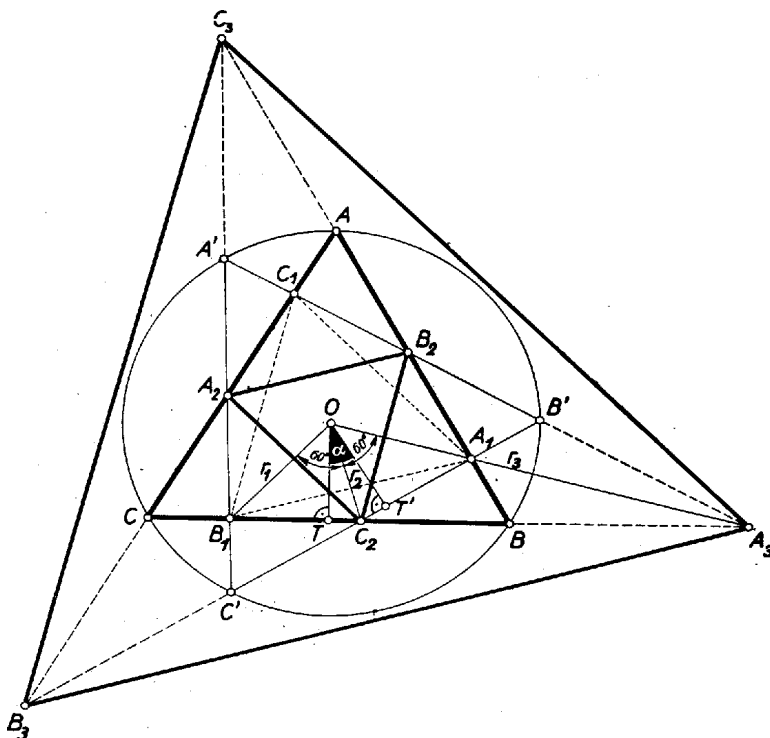


Az ábra mutatja az  $ABC$  szabályos háromszöget, az  $\alpha$  szöggel elforgatott  $A'B'C'$  szabályos háromszöget és a közös, körükük írtató kört.



Más-más oldalegyeneseket tekintve megfelelőeknek, az így kapott szabályos háromszögek legyenek rendre  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ,  $A_3B_3C_3$ . A feladat szövegében idézett helyen bizonyítottuk, hogy az oldalegyenesek metszéspontjaként kapott szabályos háromszög középpontja szintén az eredeti háromszögek  $O$  középpontja. Ez természetesen mindegyik létrejövő szabályos háromszögre vonatkozik.

A sinus-tétel egyik ismeretes alakja szerint egy háromszögben egy oldal és a szemben levő szög sinusának aránya a köréje írt kör átmérőjével egyenlő. Mivel a szabályos háromszögek mindegyikében minden szög  $60^\circ$ , így a három vizsgálandó háromszög oldalának aránya a háromszögek köré írt körök sugarának arányával lesz egyenlő. Számítsuk ki az egyes körülírt körök  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  sugarát.

Ha  $O$  pontból a  $BC$  szakaszra merőlegest bocsátunk, az így kapott  $OT$  szakasz hossza az eredeti  $ABC$  háromszög köré írt kör  $r$  sugarának a fele, mert hiszen  $OT$  a teljes súlyvonal harmadrésze. Ha az elforgatott  $B'C'$  szakaszra húzunk merőlegest, az  $OT'$  és az előbbi  $OT$  szakaszok egymással bezárt szöge  $\alpha$  lesz.

Ha az egymásnak megfelelő  $A_1-A_2-A_3$ , ill.  $B_1-B_2-B_3$ ,  $C_1-C_2-C_3$  csúcsokat vizsgáljuk, akkor ezek rendre az ábra egy-egy szimmetria tengelyén helyezkednek el, a három egyenes mindegyikén  $O$  is rajta van.

A szimmetria miatt a  $\angle TOC_2 = \angle C_2OT' = \frac{\alpha}{2}$ . A  $\angle B_1OA_1$  szög  $120^\circ$ , mert az  $A_1B_1C_1$  körülírt körében a megfelelő kerületi szög  $60^\circ$ . Így a szimmetria miatt  $\angle B_1OC_2 = \angle C_2OA_1 = 60^\circ$ .

A  $B_1OT$  derékszögű háromszögből:

$$r_1 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

az  $OTC_2$  háromszögből:

$$r_2 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

s ugyanígy az  $OTA_3$  háromszögből

$$r_3 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

A szabályos háromszögek oldalainak aránya a körülírt körök sugarainak arányával egyezik, vagyis az arány értéke az elforgatás szögének függvényeként:

$$\frac{1}{\cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} : \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\cos\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}$$