I. megoldás: A két szög összegének és különbségének sinusára ismeretes összefüggésből könnyen igazolható a következő azonosság:

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta).$$

Hogy a bizonyítandó egyenlőségre ezt alkalmazhassuk, szorozzuk meg a baloldal minden egyes tagját $2\sin\frac{\pi}{7}$-tel, s osszuk is el vele:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\frac{2\pi}{7} + \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.$$

Ezzel a bizonyítandó összefüggést igazoltuk.

Meskó Attila (Bp. VII., Madách gimn. IV. o. t.)

II. megoldás: Tudjuk, hogy $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$. Ezt az egyenlőség baloldalára alkalmazva:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = -\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right).$$

Ismeretes a következő összefüggés:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - 1 = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

(L. pl. Középiskolai Mat. Lapok XV. (1957.) 3–4. sz., 69. oldal.) Behelyettesítve ide az $x = \frac{2\pi}{7}$, $n = 3$ értékeket, a bizonyítandó összefüggés baloldala tovább így alakul:

$$-\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) = -\left(\frac{\sin\frac{7\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\right) - \frac{1}{2}.$$

Mivel $\sin\frac{7\pi}{7} = \sin\pi = 0$, így a vizsgált összeg értéke valóban $\frac{1}{2}$.

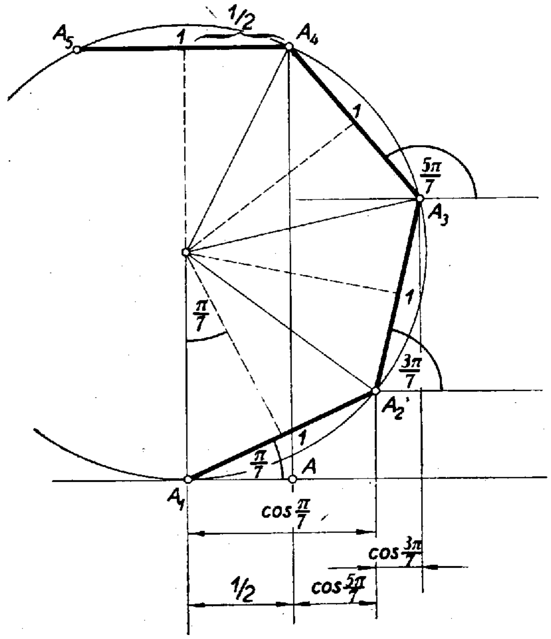
Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható, hogy tetszőleges páratlan n esetén

$$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}.$$

Elbert Árpád (Kaposvár, Közg. techn. IV. o. t.)

III. megoldás: Vegyünk fel egy egységnyi oldalú szabályos hétszöget s a hétszög köré írható kör középpontjából a csúcsokhoz húzott sugarakkal bontsuk háromszögekre. Húzzuk meg az A_1 csúcsban a kör érintőjét, és rajzoljuk meg az egyes háromszögeknek a kör középpontjából induló magasságait (1. ábra).

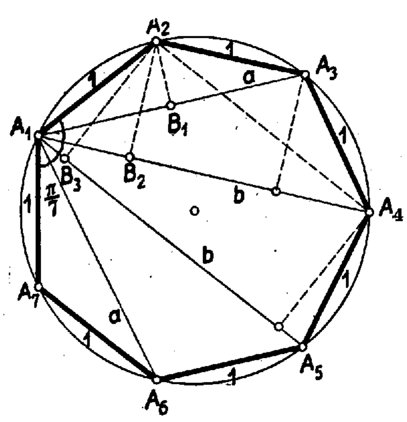


1. ábra

A magasságok az egyes háromszögek szögeit két-két $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögre bontják. A körérintő az A_1 pontban s az egységnyi hosszúságú A_1A_2 oldal $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szöget zár be (hiszen szárai merőlegesek az egyik O-nál található $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögre), az A_2 pont vetítésével létrejövő derékszögű háromszögben az A_1 csúcshoz tartozó befogó hossza $\cos\frac{\pi}{7}$. Ugyanígy okoskodhatunk az A_2-nél levő $\frac{3\pi}{7}$ s az A_3 csúcsnál lévő $\frac{5\pi}{7}$ szögeknél is. A kapott cosinus értékeket az érintőre vetítve (a $\cos\frac{5\pi}{7}$ értéket negatív volta miatt mindjárt visszafelé mérve) az érintőn megkapjuk a $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$ összeget. Az eredményül kapott A_1A szakasz hossza (az A_4A_5 hétszögoldallal összemérve) $\frac{1}{2}$ lesz, amivel épp a kívánt eredményt kaptuk.

Katona Gyula (Bp. VIII., Kandó híradásip. t. III. o. t.)

IV. megoldás: Rajzoljunk egységnyi oldalú szabályos hétszöget. Az A_1 csúcsból vont átlók hossza legyen a és b. Az átlók az A_1 csúcsnál rendre $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögeket létesítenek (2. ábra).



2. ábra

Az A_2-ből bocsássunk merőlegest az első három átlóra, ezek talppontjai legyenek B_1, B_2, B_3. Így a létrejövő egységnyi átfogójú derékszögű háromszögekből

$$\cos\frac{\pi}{7}=A_1B_1,\qquad \cos\frac{2\pi}{7}=-\cos\frac{5\pi}{7}=A_1B_2,\qquad \cos\frac{3\pi}{7}=A_1B_3.$$

Az A_1B_1 oldal hossza $\frac{a}{2}$.
Az $A_1A_2A_3A_4$ egyenlő szárú trapézból

$$A_1B_2=\frac{b-1}{2}.$$

Az $A_1A_2A_4A_5$ egyenlő szárú trapézból pedig

$$A_1B_3 = \frac{b-a}{2}.$$

Így

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2} - \frac{b-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)